COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

LEÇONS
SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE
DES SURFACES
ET LES
APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL,

PAR

GASTON DARBOUX,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

QUATRIÈME PARTIE.
DÉFORMATION INFINIMENT PETITE ET REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

PRÉFACE.

Cette quatrième et dernière Partie comprend un seul Livre, consacré à l'étude des deux problèmes étroitement liés de la *Déformation infiniment petite* et de la *Représentation sphérique*. Ce double sujet est un des plus attrayants et, je crois, un des plus féconds de la Géométrie. J'espère qu'il intéressera les nombreux lecteurs qui m'ont fait l'honneur de me suivre jusqu'au bout de ce long Ouvrage.

Le Livre VIII tout entier a paru en juillet 1895.

Les *Notes* et *Additions* qui paraissent aujourd'hui terminent à la fois le Volume et l'Ouvrage. Les trois premières sont dues à mon confrère, M. Émile Picard, à MM. G. Kœnigs et E. Cosserat. En même temps qu'elles enrichissent ce Volume, elles constituent pour l'auteur un témoignage de sympathie qui lui est des plus précieux et qu'il prend plaisir à enregistrer.

Il ne veut pas terminer sans adresser aussi ses plus vifs remerciments à MM. G. Kœnigs, C. Guichard et E. Cosserat qui ont bien voulu l'aider dans la correction des épreuves de ce Volume et à ses excellents éditeurs, MM. Gauthier-Villars, dont le concours si dévoué et si éclairé lui a été d'un grand secours depuis le commencement de la publication.

25 mars 1896.

G. DARBOUX.

ERRATA.

Première Partie.

Page 143, ligne 3 de la Note, *au lieu de* Göttingen *lisez* Göttinger.

Page 341, ligne 2, *au lieu de* 80, *lisez* 81.

Deuxième Partie.

Page 50, dans la deuxième ligne du déterminant, *au lieu de* $x_1^{(j)}$, *lisez* $y_1^{(j)}$.

Page 100, ligne 5 en remontant, *au lieu de* l'équation (1), *lisez* l'équation (2).

Page 140, formule (8), *au lieu de* $\frac{\partial x}{\partial y}$ dans la seconde ligne, *lisez* $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$.

Page 310, formule (64), *au lieu de* $(a - u$ *lisez* $(a - u)$.

Page 457, dans les trois premières formules, *au lieu de* $U + h$, *lisez* $2U + 2h$.

Troisième Partie.

Page 89, ligne 13, *au lieu de* en B′, *lisez* en B'_1.

Page 93, ligne 13 dans la formule, *au lieu de* $\frac{u^3}{3RR'}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{RR'}\right)$, *lisez* $\frac{u^3}{3}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{RR'}\right)$.

Page 94, formule (2), même correction.

Page 286, ligne 3, *au lieu de* applicable *lisez* applicables.

Page 295, ligne 13, *au lieu de* 692, *lisez* 693.

Page 332, ligne 5, *au lieu de* 692, *lisez* 693.

Page 398, ligne 12, *au lieu de* (11), *lisez* (10).

Page 473, ligne 3 en remontant, *lisez* $B = 0$.

Page 473, dernière ligne, *lisez* $A = 0$.

Quatrième Partie.

Page 46, dernière ligne, supprimez le signe —.

Page 89, dernières lignes, *au lieu de* étudiée, *lisez* étudié.

Page 151, dans le 1er membre de l'équation (24), *au lieu de* $dC'_1\, dX_1$, *lisez* $dC_1\, dX'_1$.

Page 252, ligne 19, *au lieu de* phériques, *lisez* sphériques.

Page 257, ligne 5, *ajoutez* ω_2 après r_2.

Page 369, ligne 12, *au lieu de* x, y, *lisez* X, Y.

Page 406, ligne 20, *au lieu de* $\beta_1, \beta_2, \ldots$, *lisez* $\beta_2, \beta_3, \ldots$.

Page 463, équation (42), *au lieu de* β, *lisez* β_0.

Page 477, ligne 18, *remplacez au numérateur le signe + du milieu par le signe —.*

NOTES ET ADDITIONS.

NOTE I.

SUR LES MÉTHODES D'APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

J'ai consacré plusieurs Mémoires à l'application de méthodes d'approximations successives pour démontrer l'existence et faire la recherche des intégrales de certaines équations différentielles, quand des conditions aux limites sont données qui définissent ces intégrales. Ces méthodes s'appliquent aux équations différentielles ordinaires comme aux équations aux dérivées partielles, mais pour ces dernières les conditions d'application sont bien différentes suivant que les équations considérées appartiennent au type elliptique ou au type hyperbolique. Les premières se rencontrent surtout en Physique mathématique et dans la théorie des fonctions; je ne m'en occuperai pas dans cette Note (1). Relativement aux équations du type hyperbo-

(1) Relativement aux théorèmes généraux relatifs à ce cas, nous énoncerons seulement la proposition suivante (*Journal de l'École Polytechnique*, 1890). Soit l'équation linéaire

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz=0,$$

où les coefficients sont des fonctions *analytiques* des deux variables réelles x et y : *toute intégrale de cette équation bien déterminée et continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres dans une région du plan pour laquelle*

$$B^2-AC<0$$

est une fonction analytique de x et y. Il est clair qu'il peut en être autrement dans une région où B^2-AC serait positif.

lique, l'utilité de ces méthodes est d'une double nature. Elles permettent d'abord de faire la recherche des intégrales en supposant les équations différentielles définies seulement pour les valeurs réelles des variables, et en faisant ainsi le minimum d'hypothèses sur ces équations; c'est là un point d'un certain intérêt philosophique.

Une conséquence pratique en découle; on obtient, en général, pour les intégrales un champ de détermination plus étendu qu'avec les méthodes fondées sur l'emploi de fonctions majorantes quand ces méthodes sont applicables.

1. Rappelons d'abord, sans y insister, les résultats relatifs à une équation ordinaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Si $f(x, y)$ est une fonction réelle et continue des deux variables réelles x et y, quand celles-ci varient respectivement dans les intervalles

$$(x_0 - a, x_0 + a), \qquad (y_0 - b, y_0 + b),$$

et si, de plus, il existe une constante positive k telle que

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < k|\Delta y|,$$

x, y et $y + \Delta y$ étant les intervalles indiqués, et qu'enfin M désigne le maximum de la valeur absolue de $f(x, y)$ dans ces mêmes intervalles, les approximations successives donnent l'intégrale de l'équation prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0, sous forme de série convergente dans l'intervalle $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, en désignant par ρ la plus petite des deux quantités (¹)

$$(1) \qquad a \quad \text{et} \quad \frac{b}{M}.$$

M. E. Lindelöf, qui a très heureusement approfondi cette ques-

---

(¹) Nous avons supposé la fonction $f(x, y)$ définie seulement pour les valeurs réelles de x et y. Dans le cas où $f(x, y)$ est une fonction analytique de x et y, holomorphe dans les cercles de rayons a et b tracés respectivement autour des points x_0 et y_0, et en désignant par M le module maximum de f dans ces cercles, les approximations successives permettent d'obtenir l'intégrale prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0 sous forme de série convergente dans un cercle de rayon ρ autour de x_0 (en désignant par ρ la même quantité que ci-dessus). La méthode des fonctions majorantes donne un champ de convergence moins étendu.

tion (*Journal de Math.*, 1894), a même indiqué un autre champ de convergence qui peut quelquefois être plus étendu que le précédent. Désignons par M_0 la plus grande valeur absolue de $f(x, y_0)$, quand x varie de $x_0 - a$ à $x_0 + a$; un champ de convergence assurée est l'intervalle $(x_0 - \rho', x_0 + \rho')$, en désignant par ρ' la plus petite des deux quantités

$$(2) \qquad a \quad \text{et} \quad \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{kb}{M_0}\right),$$

et ρ' peut dans certains cas dépasser ρ.

Il n'est pas sans intérêt de rappeler que la première méthode de Cauchy, telle que nous la connaissons par les leçons qu'a rédigées M. Moigno, et qui a été depuis reprise par M. Lipschitz, méthode dont le principe est de considérer l'équation différentielle comme une équation aux différences, définissait précisément l'intégrale dans l'intervalle correspondant à (1).

2. Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right).$$

Les approximations successives permettent, entre autres problèmes, de former l'intégrale d'une telle équation se réduisant, pour $x = x_0$, à une fonction donnée de y, et pour $y = y_0$ à une fonction donnée de x. Je prendrai d'abord le cas de l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

où a, b, c sont des fonctions des deux variables réelles x et y. Nous les supposerons continues à l'intérieur et sur le périmètre d'un rectangle R de côtés α et β parallèles aux axes et dont (x_0, y_0) sera le sommet de moindres abscisse et ordonnée. On veut trouver l'intégrale de cette équation se réduisant pour $y = y_0$ à $\varphi(x)$ et pour $x = x_0$ à $\psi(y)$. La fonction $\varphi(x)$ est continue de x_0 à $x_0 + \alpha$, et $\psi(y)$ est continue de y_0 à $y_0 + \beta$; on a, bien entendu, $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$ et les deux fonctions φ et ψ ont des dérivées premières continues.

Envisageons, en premier lieu, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction donnée. La fonction

$$z = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(x, y)\, dx\, dy$$

est l'intégrale de cette équation s'annulant, pour $x = x_0$, quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que soit x. Ceci posé, nous formons les équations successives

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 0,\\
&\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1}.
\end{aligned}$$

On intégrera la première équation en cherchant son intégrale z_1 se réduisant à $\varphi(x)$ pour $y = y_0$ et à $\psi(y)$ pour $x = x_0$, intégrale qui est visiblement

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0).$$

Pour toutes les autres fonctions z_n $(n > 1)$, elles sont supposées se réduire à zéro pour $x = x_0$ quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que soit x.

Nous allons montrer dans un moment que *les séries*

$$\begin{aligned}
&z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots,\\
&\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial x} + \ldots,\\
&\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial z_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial y} + \ldots
\end{aligned}$$

sont uniformément convergentes dans le rectangle R. Ce point admis, on voit sans peine que *la fonction*

$$Z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

est l'intégrale cherchée. On tire, en effet, des équations précédentes

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + \ldots + z_n
&= \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0)\\
&+ \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \left[a\frac{\partial(z_1 + \ldots + z_{n-1})}{\partial x} + b\frac{\partial(z_1 + \ldots + z_{n-1})}{\partial y} + c(z_1 + \ldots + z_{n-1}) \right] dx\, dy,
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut à la limite, en s'appuyant sur la convergence uniforme des séries écrites plus haut,

$$Z = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left[a\frac{\partial Z}{\partial x} + b\frac{\partial Z}{\partial y} + cZ\right] dx\, dy$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial Z}{\partial x} + b\frac{\partial Z}{\partial y} + cZ.$$

Abordons donc la question de convergence. Je désigne par M le maximum de

$$\left| a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1 \right|,$$

dans R, et par k le module maximum de a, b, c dans ce même rectangle, et je considère le système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{M},\\
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\, \partial y} = k\frac{\partial u_1}{\partial x} + k\frac{\partial u_1}{\partial y} + ku_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\, \partial y} = k\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + k\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + ku_{n-1},
\end{aligned}$$

tous les u s'annulant pour $x = x_0$ quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que soit x.

Si nous prouvons la convergence uniforme de la série

$$(3) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

la convergence de la série des z en résultera immédiatement, car $|z_n| < |u_{n-1}|$. Or, soit

$$u_n = k^{n-1}\mathrm{U}_n,$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \mathrm{U}_1}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{M},\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{U}_2}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial y} + \mathrm{U}_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial^2 \mathrm{U}_n}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \mathrm{U}_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{U}_{n-1}}{\partial y} + \mathrm{U}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Si la série des u est convergente, la série

$$(4) \qquad \mathrm{U}_1 + k\mathrm{U}_2 + \ldots + k^n\mathrm{U}_{n+1} + \ldots$$

représentera l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = k\frac{\partial U}{\partial x} + k\frac{\partial U}{\partial y} + kU + M, \tag{5}$$

s'annulant pour $x = x_0$, quel que soit y, et pour $y = y_0$, quel que soit x. Or si nous montrons que, pour l'équation précédente, l'intégrale satisfaisant à ces conditions initiales, est une fonction holomorphe de k pour toute valeur de k, la convergence de la série (3) sera établie, car cette intégrale devra nécessairement avoir la forme (4).

Or l'équation (5) est facile à discuter. Prenant $x_0 = y_0 = 0$, nous poserons

$$U = e^{k(x+y)}V.$$

L'équation (5) devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = (k^2 + k)\,V + M\,e^{-k(x+y)}, \tag{6}$$

L'application des approximations successives à cette dernière équation est immédiate. On a à considérer les équations

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x\,\partial y} = M\,e^{-k(x+y)},$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x\,\partial y} = (k^2 + k)V_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial y} = (k^2 + k)V_{n-1},$$

tous les V s'annulant pour $x = 0$, ainsi que pour $y = 0$. En désignant par N la valeur absolue maxima de V_0 dans R, on aura

$$|V_n| < \frac{(k^2 + k)^n x^n y^n}{(1.2\ldots n)^2},$$

d'où l'on déduit de suite la convergence de la série

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_n + \ldots,$$

qui représente l'intégrale cherchée de l'équation (6). La méthode des approximations successives donne donc pour l'équation (6) une série convergente, quand (x, y) est dans R. Chacun des termes de cette série est une fonction holomorphe de k, et la série converge uniformément, quel que soit k, dans un domaine fini quelconque du plan de cette variable. L'intégrale V de (6) est donc une fonction *entière* de k, et il en est alors de même de l'intégrale U de (5), comme nous

voulions l'établir. Les mêmes raisonnements sont valables pour les séries formées avec les dérivées partielles du premier ordre.

3. Passons au cas de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Nous abrégerons l'exposition, sans diminuer la généralité, en supposant que $z = 0$ pour $x = 0$, et aussi pour $y = 0$. Il suffit évidemment pour cela de remplacer z par $z + [\varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0)]$. Ceci posé, nous admettons que la fonction

$$\mathrm{F}(x, y, z, u, v)$$

est continue quand (x, y) est dans R, quand z varie entre $-a$ et $+a$, et que u et v varient entre $-b$ et $+b$. De plus, pour x, y, z, u et v dans ces intervalles, on a

$$|\mathrm{F}(x, y, z', u', v') - \mathrm{F}(x, y, z, u, v)| < k_1|z' - z| + k_2|u' - u| + k_3|v' - v,$$

les k étant des constantes positives. Soit enfin M le maximum de la valeur absolue de F dans la région où cette fonction est définie.

On considère les équations successives

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{F}(x, y, 0, 0, 0),$$
$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{F}\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{F}\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right),$$

les z s'annulant tous pour $x = x_0$, quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que soit x. On sera assuré que

$$z_n, \quad \frac{\partial z_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_n}{\partial y}$$

restent compris dans les limites indiquées, si (x, y) est à l'intérieur d'un rectangle compris dans R, ayant pour sommet (x_0, y_0), et dont les côtés ρ et ρ' satisfont aux inégalités

$$(7) \qquad \mathrm{M}\rho\rho' < a, \qquad \mathrm{M}\rho < b, \qquad \mathrm{M}\rho' < b.$$

Nous supposerons d'ailleurs que ρ et ρ' sont au plus égaux aux côtés α et β du rectangle R.

Dans ces conditions la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

représentera l'intégrale cherchée. On est, en effet, ramené immédiatement au cas de l'équation linéaire, en considérant les équations

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = F(x, y, 0, 0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial x\, \partial y} = F\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}\right) - F(x, y, 0, 0, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 (z_n - z_{n-1})}{\partial x\, \partial y} = F\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right) - F\left(x, y, z_{n-2}, \frac{\partial z_{n-2}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-2}}{\partial y}\right),$$

et en leur substituant les équations linéaires

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x\, \partial y} = k_1 u_{n-1} + k_2 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + k_3 \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}.$$

La convergence de la suite déduite de ces dernières équations entraîne immédiatement la convergence de la série des z dans le rectangle (ρ, ρ'), et le problème est par suite résolu. *L'intégrale est déterminée dans le rectangle* (ρ, ρ').

4. Il est remarquable que, dans la question précédente, les limites trouvées pour ρ et ρ' ne dépendent pas des constantes k. Il faut cependant que l'on soit assuré de l'existence de ces constantes pour que le raisonnement soit valable. Un cas intéressant est celui où la fonction

$$F(x, y, z, u, v)$$

serait déterminée et continue pour toute valeur réelle de z, u et v [le point (x, y) étant dans le rectangle R] et où cette fonction aurait des dérivées premières

$$\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v},$$

restant en valeur absolue moindre qu'un nombre fixe dans les mêmes conditions.

Nous n'aurons pas alors à nous préoccuper des inégalités (7), puisque la fonction F est déterminée pour toute valeur de z, u, v ; par suite, dans ce cas, *la série représentant l'intégrale convergera dans* R.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + c \sin z,$$

où a, b, c sont des fonctions continues de x et y dans le rectangle R, admettra ce rectangle même comme champ de convergence pour la série donnée par les approximations successives. On sait que l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \sin z$$

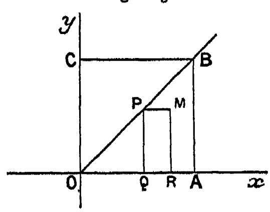
se rencontre dans la théorie des surfaces à courbure constante, et, dans ses leçons de *Géométrie différentielle*, M. Bianchi s'est servi des approximations successives appliquées à cette équation pour traiter un intéressant problème de Géométrie.

5. Bien d'autres problèmes concernant les équations précédentes pourraient être traités par une autre voie analogue. Pour indiquer au moins un nouvel exemple reprenons l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

et construisons sur Ox et Oy (*fig.* 89) le carré OABC de côtés $OA = OC = \alpha$,

Fig. 89.



que nous désignerons par R. On se donne la valeur d'une intégrale z sur OA et sur OB; on aura ainsi

$$z = f(x) \quad \text{pour} \quad y = 0,$$
$$z = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad y = x;$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées du premier ordre; elles sont définies de $x = 0$ à $x = \alpha$, et l'on a, bien entendu, $f(0) = \varphi(0)$. L'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

satisfaisant à ces conditions initiales, sera évidemment

$$z = f(x) + \varphi(y) - f(y).$$

Ensuite, en désignant par $P(x, y)$ une fonction donnée de x et de y dans le carré R, l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = P(x, y),$$

s'annulant sur OA et sur OB, sera

$$u = \int_0^y d\eta \int_y^x P(\xi, \eta)\, d\xi;$$

le champ d'intégration est le rectangle MPQR, en désignant par M le point (x, y).

Formons alors, comme précédemment, le système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 0,\\
&\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c z_{n-1}.
\end{aligned}$$

On intègre la première avec les conditions

$$z_1 = f(x) \quad \text{pour} \quad y = 0 \qquad \text{et} \qquad z_1 = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad y = x,$$

et pour n supérieur à *un*, on prend

$$z_n = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \qquad \text{et} \qquad z_n = 0 \quad \text{pour} \quad y = x.$$

Des considérations analogues à celles que nous avons employées ci-dessus permettent aisément d'établir que la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

converge uniformément dans R, et représente l'intégrale cherchée.

6. Comme exemple d'équations d'ordre supérieur au second, pour lesquelles s'appliquent sans difficultés les méthodes précédentes, je citerai les équations suivantes étudiées à ce point de vue par M. Delassus dans un des Chapitres de son intéressante thèse (*voir* aussi

Comptes rendus, 1893). Ce sont les équations d'ordre n de la forme

$$\sum_{i,k} \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0,$$

avec les conditions suivantes :

$$\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, p \\ k = 0, 1, \ldots, q \end{matrix} \quad (p + q = n, \qquad pq \neq 0)$$

et en supposant $\mathrm{A}_{pq} = 1$.

7. Je voudrais maintenant considérer des équations pour lesquelles on ne puisse appliquer la méthode précédente d'approximations. Il n'est pas difficile de trouver de tels exemples, nous n'avons qu'à prendre l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}. \tag{8}$$

Supposons qu'on veuille trouver l'intégrale de cette équation se réduisant, pour $x = x_0$, à une fonction donnée $\mathrm{F}(y)$. On peut former les équations suivantes

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = a(x, y) \frac{\partial z_1}{\partial y},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = a(x, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y},$$

z_1 prenant pour $x = x_0$ la valeur $\mathrm{F}(y)$, et les autres z s'annulant identiquement pour cette valeur de x. Mais on voit que l'on ne pourra former les fonctions $z_2, \ldots, z_n, \ldots$ que si $\mathrm{F}(y)$ et $a(x, y)$ ont des dérivées partielles de tout ordre par rapport à y, et la convergence du développement ne peut être établie que si l'on suppose que $\mathrm{F}(y)$ et $a(x, y)$ sont des fonctions analytiques. Il semble donc qu'on ne puisse établir l'existence des intégrales de l'équation (8) qu'en admettant que $a(x, y)$ est analytique. Quoique la question n'ait qu'un intérêt théorique, elle vaut peut-être la peine d'être examinée.

Reprenons d'abord, à cet effet, l'étude de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et plaçons-nous dans les hypothèses du n° **1**. Nous avons trouvé une intégrale prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0, soit

$$y = F(x, x_0, y_0),$$

en mettant en évidence toutes les quantités dont dépend F. La fonction F est une fonction continue de x, x_0 et y_0; elle a une dérivée première par rapport à x, mais toute la difficulté de la question qui nous occupe est de savoir si cette fonction a une dérivée partielle du premier ordre par rapport à y_0. Or les approximations successives nous conduisent à la suite de fonctions

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots,$$

se calculant de proche en proche au moyen des formules

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx,$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx,$$

et $F(x, x_0, y_0)$ est la limite de y_n. On peut calculer de proche en proche les dérivées partielles

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial y_0}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_n}{\partial y_0},$$

si l'on admet seulement que $f(x, y)$ a une dérivée partielle du premier ordre par rapport à y. Il est donc bien vraisemblable que F aura une dérivée partielle du premier ordre par rapport à y_0. Nous le démontrerons élégamment sans calculs en rattachant la question à un problème traité plus haut; on va supposer que $f(x, y)$ a des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à y. [Il suffirait même d'admettre que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$, sans avoir de dérivée par rapport à y, jouit de la propriété dont jouissait la fonction appelée $f(x, y)$ au n° **1**.]

Je considérerai, dans ce qui va suivre, x_0 comme une constante numérique et β désignera une seconde quantité numérique. J'envisage

l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_0}, \tag{9}$$

définissant une fonction y des deux variables x et y_0. D'après ce qui a été vu au n° 3, nous pouvons l'intégrer en prenant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{array}{lll} y = y_0 & \text{pour} & x = x_0, \\ y = \mathrm{F}(x, x_0, \beta) & \text{pour} & y_0 = \beta. \end{array}$$

L'intégrale y de l'équation (9) sera alors complètement déterminée. Or, on déduit de cette équation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) + \mathrm{P}(x),$$

$\mathrm{P}(x)$ ne dépendant pas de y_0. Or, pour $y_0 = \beta$, on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y),$$

puisque, pour $y_0 = \beta$, y est l'intégrale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, qui prend, pour $x = x_0$, la valeur β. La fonction $\mathrm{P}(x)$ est donc identiquement nulle, et l'intégrale

$$y(x, y_0),$$

que nous venons d'obtenir, est l'intégrale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ prenant pour $x = x_0$ la valeur y_0 ; elle est identique à la fonction $\mathrm{F}(x, x_0, y_0)$, et celle-ci a, par suite, une dérivée du premier ordre par rapport à y_0.

On démontrera d'une manière analogue que $\mathrm{F}(x, x_0, y_0)$ a une dérivée du premier ordre par rapport à x_0. On regardera y_0 comme une constante numérique, et soit α une seconde quantité numérique. Nous formons l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0}, \tag{10}$$

en l'intégrant avec les conditions initiales

$$\begin{array}{lll} y = y_0 & \text{pour} & x = x_0, \\ y = \mathrm{F}(x, \alpha, y_0) & \text{pour} & x_0 = \alpha, \end{array}$$

ce qui correspond au cas étudié (n° 5). On déduit de l'équation (10)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) + Q(x),$$

$Q(x)$ ne dépendant pas de x_0; on voit que $Q(x)$ est nul, en faisant dans cette relation $x_0 = \alpha$, et l'on termine comme plus haut.

Ainsi, la fonction $F(x, x_0, y_0)$ a des dérivées partielles du premier ordre par rapport à x_0 et à y_0. Or, la relation

$$y = F(x, x_0, y_0)$$

peut manifestement s'écrire

$$y_0 = F(x_0, x, y),$$

puisque l'intégrale qui, pour la valeur x de la variable, prend la valeur y aura en x_0 la valeur y_0. D'après ce qui précède, $F(x_0, x, y)$ est une fonction continue de x et y, et elle a des dérivées partielles du premier ordre elles-mêmes continues. Désignons cette fonction par

$$F(x, y),$$

en n'écrivant plus la constante x_0; nous aurons l'intégrale générale de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ sous la forme

$$F(x, y) = \text{const.},$$

et F satisfera à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Nous avons donc établi l'existence d'une intégrale de cette équation, et par suite de toutes les intégrales, en supposant seulement que $f(x, y)$ est continue et a des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à y.

Ainsi, comme application, on peut établir l'existence d'un facteur intégrant pour l'expression

$$dy + P(x, y)\,dx,$$

en supposant seulement que la fonction $P(x, y)$ est continue et a des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à y.

8. Tout ce que nous venons de dire subsistera évidemment si les fonctions considérées, au lieu d'être réelles, sont des fonctions com-

plexes des deux variables réelles x et y. En particulier, le théorème relatif au facteur intégrant qui vient d'être énoncé s'applique aussi bien si l'on a

$$P(x,y)=p(x,y)+iq(x,y),$$

p et q étant des fonctions réelles de x et y, jouissant des propriétés indiquées.

Une application, qui offre quelque intérêt, se présente immédiatement. C'est une proposition élémentaire, qu'une surface *analytique* peut être représentée sur un plan, de manière qu'il y ait conservation des angles : on a ainsi une carte géographique de la surface. La démonstration bien connue de ce théorème s'appuie essentiellement sur ce que la surface est analytique; elle revient à la recherche d'un facteur intégrant. Avec l'extension donnée à cette dernière recherche, nous n'avons plus besoin d'admettre que la surface est analytique. Soit une surface pour laquelle le carré de l'élément linéaire se mette sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,dx^2 + 2\mathrm{F}\,dx\,dy + \mathrm{G}\,dy^2.$$

On peut, d'après ce que nous venons de dire, démontrer la possibilité de faire la carte de cette surface sur un plan, si les trois coefficients E, F, G sont des fonctions continues de x et y, ayant des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à y. Il suffit même de supposer que les trois dérivées du premier ordre

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y},$$

jouissent de la propriété admise pour la fonction $f(x, y)$ au n° 1.

Ces conditions, un peu dissymétriques, sont suffisantes; elles ne sont sans doute pas toutes nécessaires, mais, pour s'en affranchir, il faudrait trouver un autre mode de démonstration pour l'existence du facteur intégrant.

NOTE II.

SUR LES GÉODÉSIQUES A INTÉGRALES QUADRATIQUES;

PAR M. G. KŒNIGS.

1. Nous nous proposons dans cette Note de développer la solution complète du problème des géodésiques qui admettent *plusieurs* intégrales quadratiques, problème partiellement traité dans le Tome III.

Si l'on cherche à exprimer que la fonction

$$\varphi = ap^2 + 2bpq + cq^2 \tag{1}$$

est une intégrale pour le problème des géodésiques du ds^2

$$ds^2 = 4\lambda\, dx\, dy, \tag{2}$$

on trouve l'équation (nº 593, t. III, p. 30)

$$\left\{\begin{aligned} &\left(p^2\frac{\partial a}{\partial x} + 2pq\frac{\partial b}{\partial x} + q^2\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{q}{\lambda} + \left(p^2\frac{\partial a}{\partial y} + 2pq\frac{\partial b}{\partial y} + q^2\frac{\partial c}{\partial y}\right)\frac{p}{\lambda} \\ &\qquad + 2\frac{pq}{\lambda^2}(ap+bq)\frac{\partial\lambda}{\partial x} + 2\frac{pq}{\lambda^2}(bp+cq)\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

En raisonnant comme au nº 593, on reconnaît que l'équation (3) se décompose en quatre autres, à savoir tout d'abord les équations

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = 0,$$

en sorte que l'on a

$$a = \mathrm{X}, \qquad b = \mathrm{Y},$$

où X ne dépend que de x et Y que de y. Les deux autres équations qui proviennent de la décomposition de l'équation (3) s'écrivent alors

$$-2\frac{\partial(b\lambda)}{\partial x} = \lambda \mathrm{Y}' + 2\mathrm{Y}\frac{\partial\lambda}{\partial y},$$

$$-2\frac{\partial(b\lambda)}{\partial y} = \lambda \mathrm{X}' + 2\mathrm{X}\frac{\partial\lambda}{\partial x},$$

u encore, ce qui revient au même,

$$(4)\qquad -2b\lambda = \int\left(\lambda Y' + 2Y\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)dx + \left(\lambda X' + 2X\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)dy,$$

t, b étant définie par cette équation, l'intégrale φ prend la forme uivante

$$(5)\qquad \varphi = Xp^2 + 2b\,pq + Yq^2.$$

Il faut toutefois que la condition d'intégrabilité dans l'intégrale (4) oit satisfaite, ce qui s'exprime par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda Y' + 2Y\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda X' + 2X\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right).$$

)éveloppée, cette équation devient

$$(6)\qquad 2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda.$$

C'est précisément l'équation (41) du n° 413 [II, p. 209]. Elle exprime . cet endroit que, si x, y ne sont pas nuls, la transformation

$$(7)\qquad x' = \int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad y' = \int\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

mène le ds^2 à la forme de Liouville.

Si l'une des deux fonctions est nulle, tout ce qui a trait à l'intégrale (5) persiste, mais la forme de Liouville disparaît. Nous sommes ılors dans le cas traité au n° 594 [III, p. 31], et le ds^2 se réduit par a transformation

$$(8)\qquad x' = \int\frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad y' = y \qquad (\text{Y étant nul}),$$

la forme de Lie.

A l'égard de l'équation (6) on a remarqué au n° 413 [II, p. 209] que, si (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) sont deux couples de solutions de cette équation, il en est de même du couple de fonctions

$$(aX_1 + bX_2,\ aY_1 + bY_2),$$

où a, b sont deux constantes.

Plus généralement, si (A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_p, B_p) sont p couples de solutions de l'équation (6) et k_1, k_2, ..., k_p des constantes, les fonctions $\Sigma k_i A_i$, $\Sigma k_i B_i$ constituent un couple de solutions.

Désignons, d'une façon générale, par φ_i l'intégrale qui, d'après les formules (4), (5), correspond au couple $X = A_i$, $Y = B_i$; l'intégrale correspondante au couple $(\Sigma k_i A_i, \Sigma k_i B_i)$ sera, comme on le constate sans peine,

$$\varphi = \Sigma k_i \varphi_i.$$

S'il n'existe pas de système de valeurs des k_i (si ce n'est zéro) qui annule à la fois $\Sigma k_i A_i$, $\Sigma k_i B_i$, nous dirons que les p couples (A_1, B_1), ..., (A_p, B_p) sont indépendants. Si les p couples sont indépendants, pour aucune valeur des k_i l'intégrale φ ne se réduira à une constante ou à l'intégrale des forces vives qui est $\frac{pq}{\lambda}$. Il faudrait en effet que les coefficients de p^2 et de q^2 fussent nuls; cela ne se peut, car ces coefficients sont justement $\Sigma k_i A_i$ et $\Sigma k_i B_i$, qui, par hypothèse, ne peuvent s'annuler en même temps.

Nous pouvons dire qu'à p couples indépendants des solutions de l'équation (6) il correspond p intégrales quadratiques indépendantes. Nous nous proposons de rechercher tous les ds^2 dont les géodésiques admettent plusieurs intégrales quadratiques indépendantes.

2. A la page 218 du Tome II a été posée la question de trouver les ds^2 qui admettent plusieurs réductions au type de Liouville. Les liens connus qui rattachent les intégrales quadratiques aux formes de Liouville d'un ds^2 montrent que ce problème et le précédent n'en font qu'un. Cependant, l'existence possible des formes de M. Lie peut faire naître un doute. Il convient de le dissiper. Si l'équation (6) admet un couple de solutions unique (X, Y), la forme de Liouville est acquise au ds^2, sauf le cas où l'une des fonctions X, Y est nulle, car alors la forme de Lie intervient. Par contre, *si l'équation* (6) *admet* plusieurs *couples de solutions indépendants*, $p > 1$, *la forme de Liouville est sûrement acquise au* ds^2. On verra même, par la suite, que la réduction au type de Liouville comporte $p-1$ paramètres, si p est le nombre exact des couples indépendants de solutions de l'équation (6).

La démonstration de la proposition précédente est des plus simples. Quels que soient les p coefficients constants k_i, l'équation (6) admet le couple de solutions $\Sigma k_i A_i$, $\Sigma k_i B_i$. Donc, si les A ne sont pas tous nuls et si les B ne sont pas tous nuls, l'équation (6) admet un couple dans lequel aucune des fonctions X, Y n'est nulle et la transformation (7) amènera la forme de Liouville.

Reste le cas où toutes les fonctions A, par exemple, seraient nulles. L'équation (6) admet alors les couples de solutions $(0, B_1)$ $(0, B_2)$ et

un calcul facile prouve que le ds^2 est celui du plan. Comme le ds^2 du plan possède des formes de Liouville, le théorème est démontré.

La forme de Liouville étant acquise aux ds^2 que nous étudions, nous pourrons prendre, comme point de départ, une forme de Liouville de ce ds^2 supposée connue. Dans ce cas, on le vérifie aisément, l'équation (6) admet normalement le couple de solutions ($X=1$, $Y=1$). Soit X, Y un autre couple de solutions; la transformation (7) fera passer de la forme de Liouville du ds^2 à une autre; pour ce motif, j'appelle les fonctions X, Y des *coefficients de transformation* du ds^2. Cette locution abrégera beaucoup le langage. Si l'équation (6) admet *exactement* p couples indépendants, nous aurons, outre le couple $(1, 1)$ $p-1$ autres couples (A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_{p-1}, B_{p-1}) et l'indépendance de tous ces couples se traduit par ce fait qu'une équation de la forme

$$k_1(A_1 - B_1) + \ldots + k_{p-1}(A_{p-1} - B_{p-1}) = 0 \tag{9}$$

est impossible, sauf si les constantes k sont toutes nulles.

La réduction la plus générale du ds^2 à la forme de Liouville s'obtiendra par les formules (7) qui seront ici

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \int \frac{dx}{\sqrt{k_1 A_1 + \ldots + k_{p-1} A_{p-1} + k_p}}, \\ y' &= \int \frac{dy}{\sqrt{k_1 B_1 + \ldots + k_{p-1} B_{p-1} + k_p}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Si on laisse aux constantes k toute leur généralité, le ds^2 acquiert une forme de Liouville que nous appelons son *type essentiel* et les variables x', y' sont les variables *essentielles*.

Pour certaines valeurs particulières des constantes k, le type essentiel dégénère et change d'aspect pour devenir un *type singulier*.

Les divers types essentiels d'un même ds^2 ont le même aspect et ne diffèrent que par certaines constantes; par exemple, s'il s'agit de fonctions elliptiques, les invariants g_2, g_3 pourront changer.

3. Ceci posé, proposons-nous tout d'abord de trouver les ds^2 dont les géodésiques admettent plus de trois intégrales quadratiques indépendantes. Nous prenons le ds^2 sous la forme de Liouville

$$[X_1(x_1) - Y_1(y_1)]\, dx\, dy,$$

où $x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$; l'équation (6) devient alors, avec ces

notations,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Omega = (X - Y)(X_1'' - Y_1'') + (X_1 - Y_1)(X'' - Y'') \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{2}}(X' - Y')X_1' - \frac{3}{\sqrt{2}}(X' + Y')Y_1' = 0. \end{aligned}\right.$$

Posons, pour abréger,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{X_1' - Y_1'}{X_1 - Y_1}, \qquad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{X_1' + Y_1'}{X_1 - Y_1}, \\ &k_1 = \frac{1}{X_1 - Y_1}\,\frac{\partial^2 \log(X_1 - Y_1)}{\partial x\,\partial y} = \frac{2\dfrac{\partial p_1}{\partial y}}{X_1 - Y_1} = \frac{2\dfrac{\partial q_1}{\partial x}}{X_1 - Y_1}, \end{aligned}\right.$$

en sorte que $-2k_1$ est la *courbure totale* du ds^2; faisons aussi

$$(13)\qquad h_1 = \frac{\partial^2 k_1}{\partial x^2} + 4p_1\frac{\partial k_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 k_1}{\partial y^2} + 4q_1\frac{\partial k_1}{\partial y}.$$

Le lecteur vérifiera que l'on a identiquement

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 \dfrac{\Omega}{X_1 - Y_1}}{\partial x\,\partial y} - \frac{3}{2}k_1\Omega = (X_1 - Y_1)\Phi,$$

où l'on a posé

$$(15)\qquad \Phi = 5\frac{\partial k_1}{\partial x}X' - 5\frac{\partial k_1}{\partial y}Y' + 2h_1(X - Y).$$

L'équation $\Omega = 0$ entraîne donc $\Phi = 0$. Supposons que le ds^2 admette au moins quatre intégrales quadratiques indépendantes; outre le couple $(1, 1)$, l'équation (11) doit admettre encore au moins trois autres couples (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), ce qui donne les trois équations

$$5\frac{\partial k_1}{\partial x}A_1' - 5\frac{\partial k_1}{\partial y}B_1' + 2h_1(A_1 - B_1) = 0,$$

$$5\frac{\partial k_1}{\partial x}A_2' - 5\frac{\partial k_1}{\partial y}B_2' + 2h_1(A_2 - B_2) = 0,$$

$$5\frac{\partial k_1}{\partial x}A_3' - 5\frac{\partial k_1}{\partial y}B_3' + 2h_1(A_3 - B_3) = 0.$$

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1' & B_1' & A_1 - B_1 \\ A_2' & B_2' & A_2 - B_2 \\ A_3' & B_3' & A_3 - B_3 \end{vmatrix} = \Delta$$

n'est pas nul, il faut donc avoir

$$\frac{\partial k_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial k_1}{\partial y} = 0, \qquad h_1 = 0.$$

La courbure $-2k_1$ est donc constante.

La conclusion est la même si le déterminant est nul. Ce déterminant nul exprime, en effet, que l'on a une équation de la forme

$$\frac{A_3 - B_3}{A_1 - B_1} = f\left(\frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1}\right),$$

où f ne peut désigner une fonction linéaire, sans quoi il existerait une relation de la forme (9). Dans ces conditions on constate facilement que $\frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1}$ et $\frac{A_3 - B_3}{A_1 - B_1}$ ne peuvent dépendre que d'une seule des variables x, y; de y par exemple. Alors A_1, A_2, A_3 sont des constantes que l'on peut ramener à zéro en substituant aux couples (A_i, B_i) les trois couples $(0, B_i - A_i)$. On est donc ramené au cas où les fonctions d'un même nom sont nulles dans plusieurs couples. Nous avons déjà dit que ce cas était celui du plan ou des surfaces à courbure nulle.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Si un ds^2 admet plus de trois intégrales quadratiques indépendantes, pour ses géodésiques, sa courbure est constante.

Un ds^2 de courbure constante admet exactement cinq intégrales quadratiques pour ses géodésiques, comme on l'a vu à la page 210 du Tome II. Si on le prend sous la forme simple

$$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x-y)^2},$$

l'équation (11) admet, en effet, les cinq couples

$$(1, 1), \quad (x, y), \quad (x^2, y^2), \quad (x^3, y^3), \quad (x^4, y^4).$$

Dans le cas du plan

$$ds^2 = dx\,dy,$$

l'équation (6) se réduit à $X'' = Y''$ et admet les cinq couples indépendants

$$(1, 0), \quad (x, 1), \quad (1, y), \quad (x, y), \quad (x^2, y^2).$$

On voit donc que, si un ds^2 admet plus de trois intégrales quadratiques, il en admet exactement cinq. Il n'y en a pas qui en possède quatre ou plus de cinq.

4. Cherchons à présent les ds^2 qui admettent exactement trois intégrales quadratiques et pour lesquelles, par conséquent, la courbure sera variable. On a vu au n° 596 [III, p. 38] que si un ds^2 admet à la fois une intégrale linéaire et une intégrale quadratique pour ses géodésiques, il est de révolution; et que, outre l'intégrale quadratique en question et le carré de l'intégrale linéaire, qui est aussi une intégrale quadratique, il admet une troisième intégrale quadratique, indépendante des deux premières.

La réciproque de cette proposition est vraie; en sorte que, tout ds^2 dont les géodésiques admettent trois intégrales quadratiques indépendantes convient à une surface de révolution (nous disons pour abréger ds^2 de révolution).

Voici la méthode qui nous conduit à ce résultat :

Supposons que, par un procédé quelconque, analogue à celui qui nous a donné l'équation $\Phi = 0$, on ait tiré de $\Omega = 0$ deux équations linéaires de la forme

$$R_1 X' - R_2 Y' + R_3 (X - Y) = 0,$$
$$S_1 X' - S_2 Y' + S_3 (X - Y) = 0,$$

où les R et les S ne dépendent que des fonctions X_1, Y_1 et de leurs dérivées. Ces équations, résolues en $\frac{X'}{X-Y}$, $\frac{Y'}{X-Y}$, donneront

$$\frac{X'}{X-Y} = P, \qquad -\frac{Y'}{X-Y} = Q,$$

d'où

$$d\log(X - Y) = P\,dx + Q\,dy. \tag{16}$$

$P\,dx + Q\,dy$ devra être une différentielle exacte, en sorte que les fonctions X_1, Y_1 devront vérifier la relation

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{17}$$

Cette condition vérifiée, posons $P\,dx + Q\,dy = d\log u$. La fonction u ne dépendra que de X_1, Y_1, comme P, Q, et l'équation (16) donne alors

$$X - Y = C.u;$$

C désigne une constante. Il faudra que u soit de la forme $f(x) - g(y)$ où $f(x)$, $g(y)$ sont des fonctions déterminées, et l'équation précédente donnera, a étant une constante,

$$X = C f(x) + a, \qquad Y = C g(y) + a.$$

Dans ce cas, par conséquent, le ds^2 n'admet pas d'autres couples de solutions pour l'équation (11) que (1, 1) $[f(x), g(y)]$.

Il faut donc, pour que le ds^2 admette trois intégrales quadratiques, que toutes les équations linéaires analogues à $\Phi = 0$ se réduisent à une seule, qui sera $\Phi = 0$ elle-même, puisque l'on fait abstraction des ds^2 de courbure constante, les seuls pour lesquels Φ soit identiquement nulle.

C'est ainsi qu'en posant

$$\alpha = \frac{\frac{\partial k_1}{\partial x}\frac{\partial k_1}{\partial y}}{X_1 - Y_1},$$

on trouve l'identité

$$\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial k_1}{\partial x}} + \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial k_1}{\partial y}} - 5\frac{\Omega}{X_1 - Y_1} + \frac{2}{5}\frac{\frac{\partial^2 k_1}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial k_1}{\partial x}\frac{\partial k_1}{\partial y}}\Phi = 7\Psi,$$

Ψ ayant cette expression

$$\alpha.\Psi = \frac{\partial \alpha}{\partial x}X' - \frac{\partial \alpha}{\partial y}Y' + g_1(X - Y);$$

g_1 est une fonction sans importance.

Il est clair que $\Omega = 0$ entraîne $\Phi = 0$ et $\Psi = 0$. Il faudra donc que Ψ soit proportionnel à Φ ou que

$$\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{5\frac{\partial k_1}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{5\frac{\partial k_1}{\partial y}} = \frac{g_1}{2h_1}.$$

La première de ces équations nous donnera

$$\alpha = f(k_1).$$

Au lieu d'utiliser la seconde, qui est compliquée, nous allons former une autre combinaison. Posons

$$\beta = \frac{\frac{\partial^2 k_1}{\partial x\,\partial y}}{X_1 - Y_1};$$

on trouvera, sans peine, que l'on a identiquement

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} - 5\frac{\partial^2 k_1}{\partial x\,\partial y}\frac{\Omega}{X_1 - Y_1} = (X_1 - Y_1)\theta,$$

avec cette expression de Θ,

$$\Theta = \frac{\partial}{\partial x}(7\beta + 2k_1^2)X' - \frac{\partial}{\partial y}(7\beta + 2k_1^2)Y' + l_1(X - Y);$$

l_1 est une fonction qu'il est inutile de calculer. Comme $\Theta = o$ est une conséquence de $\Omega = o$, on doit écrire encore

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}(7\beta + 2k_1^2)}{5\frac{\partial k_1}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(7\beta + 2k_1^2)}{5\frac{\partial k_1}{\partial y}} = \frac{l_1}{2h_1}.$$

Nous n'utiliserons que la première de ces équations qui donne

$$7\beta + 2k_1^2 = f_1(k_1)$$

ou encore

$$\beta = \varphi(k_1).$$

Prenons alors une fonction quelconque de k_1, $\theta(k_1)$. On aura

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} = \theta''(k_1)\frac{\partial k_1}{\partial x}\,\frac{\partial k_1}{\partial y} + \theta'(k_1)\frac{\partial^2 k_1}{\partial x\, \partial y},$$

et comme on a trouvé

$$\frac{\partial k_1}{\partial x}\,\frac{\partial k_1}{\partial y} = (X_1 - Y_1)\alpha = (X_1 - Y_1)f(k_1),$$

$$\frac{\partial^2 k_1}{\partial x\, \partial y} = (X_1 - Y_1)\beta = (X_1 - Y_1)\varphi(k_1),$$

il viendra

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} = (X_1 - Y_1)[\theta''(k_1)f(k_1) + \theta'(k_1)\varphi(k_1)];$$

$f(k_1)$ ne peut être nul sans quoi α serait nul, et l'on verrait que la courbure est constante. Dès lors, on peut trouver une fonction $\theta(k_1)$, *contenant effectivement* k_1 et vérifiant l'équation

$$\theta''(k_1)f(k_1) + \theta'(k_1)\varphi(k_1) = o.$$

On aura alors $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} = o$, d'où résulte

$$\theta(k_1) = \xi + \eta,$$

où ξ est fonction de x, et η de y. En résolvant, on trouvera

$$k_1 = \psi(\xi + \eta);$$

si ξ (ou η) se réduisait à une constante, α serait nul, cas écarté. On

peut donc prendre ξ, η pour variables; or il vient

$$\frac{\partial k_1}{\partial x} = \psi'\xi', \qquad \frac{\partial k_1}{\partial y} = \psi'\eta',$$

d'où

$$\alpha(X_1 - Y_1) = \frac{\partial k_1}{\partial x}\frac{\partial k_1}{\partial y} = \psi'^2\xi'\eta',$$

et enfin

$$(X_1 - Y_1)\, dx\, dy = \frac{\psi'^2}{\alpha}\xi'\eta'\, dx\, dy = \frac{\psi'^2}{f(k_1)}\, d\xi\, d\eta.$$

Comme ψ' est fonction de $\xi + \eta$ ainsi que $f(k_1)$, on a bien le ds^2 d'une surface de révolution.

5. Le théorème étant ainsi établi, nous pouvons en déduire, par une nouvelle méthode, les ds^2 de révolution à intégrales quadratiques.

Soit, en effet,

$$\varphi(x - y)\, dx\, dy$$

un de ces ds^2 et (X, Y) un de ses coefficients de transformation; comme le ds^2 ne change pas par le changement de (x, y) en $(x + h, y + h)$, il est clair que $X(x + h)$, $Y(y + h)$ est encore un couple de coefficients de transformation. Il en est de même du couple

$$\frac{X(x+h) - X(x)}{h}, \qquad \frac{Y(y+h) - Y(y)}{h},$$

et, par suite, en faisant tendre h vers zéro, on reconnaît que $X'(x)$, $Y'(y)$ est un couple de coefficients de transformation. L'équation (11) admet donc ici les couples suivants de solutions

$$(1, 1) \quad (X, Y) \quad (X', Y') \quad (X'', Y'') \quad \ldots.$$

Comme trois couples seulement peuvent être indépendants, il faut que l'on ait deux équations simultanées de la forme

$$aX'' + bX' + cX + d = 0,$$
$$aY'' + bX' + cY + d = 0,$$

où a, b, c, d sont des constantes.

La discussion de ces équations linéaires se fait sans difficulté et l'on arrive ainsi à former le Tableau des ds^2 de révolution à intégrales quadratiques sous leur forme caractéristique de révolution.

C'est ainsi que nous avons formé le Tableau I.

Dans le Tableau II, nous donnons les formes de Liouville à courbure constante non nulle. Le premier type $[p(x+y) - p(x-y)]\, dx\, dy$ est le type essentiel; les quatre autres types sont singuliers.

Dans le Tableau III sont les types de Liouville du plan. Le premier type est la forme essentielle, les cinq autres types sont singuliers.

En partant des types du Tableau I, il est facile de former les types essentiels de révolution. Ces types sont au nombre de quatre, irréductibles les uns aux autres; le Tableau IV les représente.

La discussion détaillée des divers cas singuliers conduit à former les types singuliers qui se rattachent à ces quatre types essentiels. Ils sont contenus dans le Tableau V, avec l'indication du type essentiel auquel ils appartiennent. Nous ne saurions entrer ici dans le détail des calculs, et nous renvoyons le lecteur à notre Mémoire inséré au t. XXXI des *Savants étrangers*.

TABLEAU I.

Formes de révolution à intégrales quadratiques sous leur aspect caractéristique de révolution $g(x \mp y)\,dx\,dy$.

1. $$ds^2 = \frac{a\left(e^{\frac{x-y}{2}} + e^{\frac{y-x}{2}}\right) + b}{\left(e^{\frac{x-y}{2}} - e^{\frac{y-x}{2}}\right)^2}\,dx\,dy,$$

Couples de solutions de l'équation (11) : $(1, 1)$, (e^x, e^y), (e^{-x}, e^{-y}).

2. $$ds^2 = \left(ae^{-\frac{x+y}{2}} + be^{-(x+y)}\right)dx\,dy,$$

Couples de solutions de l'équation (11) : $(1, 1)$, $(0, e^y)$, $(e^x, 0)$.

3. $$ds^2 = \left[\frac{a}{(x-y)^2} + b\right]dx\,dy,$$

Couples de solutions de l'équation (11) : $(1, 1)$, (x, y), (x^2, y^2).

4. $$ds^2 = (x+y)\,dx\,dy,$$

Couples de solutions de l'équation (11) : $(1, 1)$, (x, y), $(0, 1)$.

Remarque. — Le premier type peut encore s'écrire

$$ds^2 = \frac{a\cos\dfrac{x'-y'}{2} + b}{\sin^2\dfrac{x'-y'}{2}}\,dx'\,dy',$$

avec les couples de solutions $(1, 1)$, $(\cos x', \cos y')$, $(\sin x', \sin y')$.

TABLEAU II.

Formes de Liouville à courbure constante non nulle.

1. $$ds^2 = [p(x+y) - p(x-y)]\,dx\,dy.$$

Expression générale des coefficients de transformation $[\Phi(x), \Phi(y)]$,

où l'on a

$$\Phi(x) = L_0\,p(x) + L_1\,p(x+\omega_1) + L_2\,p(x+\omega_2) + L_3\,p(x+\omega_3) + L_4.$$

2. $$ds^2 = \left[\frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{\sin^2(x-y)}\right] dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x), \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = \frac{L_0}{\sin^2 x} + \frac{L_1}{\cos^2 x} + L_2 \cos 4x + L_3 \cos 2x + L_4.$$

3. $$ds^2 = \frac{1}{\sin^2(x-y)}\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x), \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = L_0 \sin 4x + L_1 \sin 2x + L_2 \cos 4x + L_3 \cos 2x + L_4.$$

4. $$ds^2 = \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right] dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x), \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = \frac{L_0}{x^2} + L_1 x^2 + L_2 x^4 + L_3 x^6 + L_4.$$

5. $$ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

Coefficients de transformation $[\Phi(x), \Phi(y)]$.

$$\Phi(x) = L_0 x^4 + L_1 x^3 + L_2 x^2 + L_3 x + L_4.$$

Dans ces formules les L sont des constantes arbitraires; $p(x)$ est la fonction de M. Weierstrass.

TABLEAU III.

Formes de Liouville à courbure nulle.

1. $$ds^2 = \left(e^{\overline{x+y}} + e^{-\overline{x+y}} + e^{\overline{x-y}} + e^{-\overline{x-y}}\right) dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu(e^x - e^{-x}) + \nu}{(e^x - e^{-x})^2}$, $\lambda + \dfrac{\mu'(e^y - e^{-y}) + \nu'}{(e^y + e^{-y})^2}$.

2. $$ds^2 = (e^{x+y} + e^{x-y})\, dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu(e^x - e^{-x}) + \nu}{(e^x + e^{-x})^2}$, $\lambda + \dfrac{\mu' e^y + \nu'}{e^{2y}}$.

3. $$ds^2 = e^{x+y}\, dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda + \dfrac{\mu e^x + \nu}{e^{2x}}$, $\lambda + \dfrac{\mu' e^y + \nu'}{e^{2y}}$.

4. $$ds^2 = \left(\overline{x+y}^{\,2} - \overline{x-y}^{\,2}\right) dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \dfrac{\mu}{x^2} + \nu$, $\lambda y^2 + \dfrac{\mu'}{y^2} + \nu'$.

5. $$ds^2 = \left(\overline{x+y} - \overline{x-y}\right) dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \mu x + \nu$, $\lambda y^2 + \dfrac{\mu'}{y^2} + \nu'$.

6. $$ds^2 = dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\lambda x^2 + \mu x + \nu$, $\lambda y^2 + \mu' y + \nu'$.

Dans toutes ces formules, λ, μ, ν, μ', ν' représentent cinq constantes entièrement arbitraires.

Le premier type de ce Tableau, qui est le type essentiel des ds^2 de courbure nulle peut s'écrire encore

$$ds^2 = \left(\cos\overline{x'+y'} - \cos\overline{x'-y'}\right) dx'\,dy',$$

avec les coefficients de transformation

$$\lambda + \frac{\mu\cos x' + \nu}{\sin^2 x'}, \quad \lambda + \frac{\mu'\cos y' + \nu'}{\sin^2 y'}.$$

TABLEAU IV.

Types essentiels des ds^2 de révolution.

1. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \mathrm{A}[\wp(x+y)-\wp(x-y)]\,dx\,dy \\ & + \mathrm{B}[\wp(x+y+\omega_1)-\wp(x-y+\omega_1)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation

$$[\wp(x)+\wp(x+\omega_1),\ \wp(y)+\wp(y+\omega_1)],$$

$$[\wp(x+\omega_2)+\wp(x+\omega_3),\ \wp(y+\omega_2)+\wp(y+\omega_3)].$$

2. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \mathrm{A}\left(\cos 4\,\overline{x+y}-\cos 4\,\overline{x-y}\right)dx\,dy \\ & + \mathrm{B}\left(\cos 2\,\overline{x+y}-\cos 2\,\overline{x-y}\right)dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $\left(0,\ \dfrac{1}{\sin^2 2y}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sin^2 2x},\ 0\right)$,

3. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & \mathrm{A}\left[\frac{1}{\sin^2\overline{x+y}}-\frac{1}{\sin^2\overline{x-y}}\right]dx\,dy \\ & + \mathrm{B}\left(\cos 2\,\overline{x+y}-\cos 2\,\overline{x-y}\right)dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x},\ \dfrac{1}{\sin^2 y}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\cos^2 x},\ \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)$.

4. $$ds^2 = \mathrm{A}\left(\overline{x+y}^4-\overline{x-y}^4\right)dx\,dy + \mathrm{B}\left(\overline{x-y}^2-\overline{x-y}^2\right)dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left(\dfrac{1}{x^2},\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{y^2}\right)$.

Dans ces formules, A, B sont deux constantes qui changent d'un ds^2 à l'autre.

TABLEAU V.

Types singuliers des ds^2 de révolution (¹).

Types équivalents au type essentiel IV_1.

1. $$\frac{a\cos\frac{x-y}{2}+b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos x, \cos y)$, $(\sin x, \sin y)$.

2. $$\left(\frac{a}{\sin^2\frac{x+y}{2}}+\frac{b}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos x, \cos y)$, $(\cos 2x, \cos 2y)$,

3. $$\left[a\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{\cos^2\frac{x-y}{2}}\right)+b\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{x-y}{2}}\right)\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(\cos 2x, \cos 2y)$, $\left(\frac{1}{\sin^2 x}, \frac{1}{\sin^2 y}\right)$.

4. $$\left[\frac{a}{(x+y)^2}+\frac{b}{(x-y)^2}\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x^4, y^4), (x^2, y^2)

Types équivalents au type essentiel IV_2.

5. $$\left[ae^{-(x+y)}+be^{-2(x+y)}\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $(e^{2x}, 0)$, $(0, e^{2y})$.

6. $$\left[a+b\left(\overline{x+y}^{\,2}-\overline{x-y}^{\,2}\right)\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2), $(0, 1)$.

7. $$\left[a\left(e^{2(x+y)}-e^{-2(x-y)}\right)+b\left(e^{4(x+y)}-e^{-4(x-y)}\right)\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation $\left[\frac{1}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}, 0\right]$ $(0, e^{-4y})$.

(¹) La concordance entre les types du Tableau V et leurs types essentiels du Tableau IV s'établit par certaines relations qui permettent d'exprimer les constantes a, b en fonction des constantes A, B.

Types équivalents au type essentiel IV_3.

8. $$\left[\frac{a}{(x-y)^2}+b\right]dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x, y), (x^2, y^2).

9. $$\left\{a[(x+y)^2-(x-y)^2]+b\left[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right]\right\}dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2), $\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$.

10. $$\left[\frac{a}{(e^{x-y}-e^{y-x})^2}+be^{2(x+y)}\right]dx\,dy.$$

Coefficients de (e^{-2x}, e^{-2y}), (e^{-4x}, e^{-4y}).

Type équivalent au type essentiel IV_4.

11. $$(x+y)\,dx\,dy.$$

Coefficients de transformation (x, y), $(0,1)$.

6. Notre attention doit actuellement se porter sur les ds^2 qui admettent exactement deux intégrales quadratiques.

La symétrie de l'équation (11) manifeste d'abord ce fait intéressant [1] que si X, Y est un couple de coefficients de transformation pour le ds^2

$$ds^2 = (X_1 - Y_1)\,dx\,dy, \tag{18}$$

d'autre part X_1, Y_1 est un couple de coefficients de transformation pour le ds^2

$$ds_1^2 = (X - Y)\,dx_1\,dy_1. \tag{19}$$

Nous disons de ces deux ds^2 qu'ils sont *réciproques* l'un de l'autre. Deux surfaces admettant deux ds^2 réciproques seront dites aussi *réciproques*. Deux surfaces réciproques se correspondent point par point de sorte que les géodésiques de chacune ont pour images sur l'autre des familles de coniques géodésiques (*voir* le n° 587, t. III, p. 16).

En appliquant cette remarque aux ds^2 des Tableaux III et II nous avons formé les Tableaux VI et VII.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX.

TABLEAU VI.

Réciproques des ds^2 du plan.

1. $$ds^2 = \left(\frac{\mu \cos \frac{x+y}{2} + \nu}{\sin^2 \frac{x+y}{2}} - \frac{\mu' \cos \frac{x-y}{2} + \nu'}{\sin^2 \frac{x-y}{2}} \right) dx\, dy.$$

Coefficients de transformation ($\cos x$, $\cos y$).

2. $$ds^2 = \left[\frac{\mu(e^{x-y} + e^{y-x}) + \nu}{(e^{x-y} - e^{y-x})^2} + \frac{\mu' e^{x+y} + \nu'}{e^{2(x+y)}} \right] dx\, dy.$$

Coefficients de transformation (e^{2x}, e^{2y}).

3. $$ds^2 = \left(\frac{\mu e^{x+y} + \nu}{e^{2(x+y)}} + \frac{\mu' e^{x-y} + \nu'}{e^{2(x-y)}} \right) dx\, dy.$$

Coefficients de transformation (e^{2x}, 0).

4. $$ds^2 = \left[\lambda xy + \frac{\mu}{(x+y)^2} + \frac{\nu}{(x-y)^2} + \rho \right] dx\, dy.$$

Coefficients de transformation (x^2, y^2).

5. $$ds^2 = \left[\lambda xy + \frac{\mu}{(x-y)^2} + \nu(x+y) + \rho \right] dx\, dy.$$

Coefficients de transformation (x, y).

6. $$ds^2 = (\lambda xy + \mu x + \nu y + \rho)\, dx\, dy.$$

Ce dernier ds^2 est de révolution type V_6 si λ n'est pas nul, type V_{11} si λ est nul; c'est un ds^2 à courbure nulle si, λ étant nul, μ ou ν le sont aussi.

TABLEAU VII.

Réciproques des ds^2 de courbure constante non nulle.

1 $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[\wp(x+y)-\wp(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_1[\wp(x+y+\omega_1)-\wp(x-y+\omega_1)]\,dx\,dy \\ & + A_2[\wp(x+y+\omega_2)-\wp(x-y+\omega_2)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\wp(x+y+\omega_3)-\wp(x-y+\omega_3)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $[\wp(2x), \wp(2y)]$.

2. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left[\frac{1}{\sin^2(x+y)}-\frac{1}{\sin^2(x-y)}\right]dx\,dy \\ & A_1\left[\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{1}{\cos^2(x-y)}\right]dx\,dy \\ & + A_2[\cos 2(x+y)-\cos 2(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\cos 4(x+y)-\cos 4(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $\left(\frac{1}{\sin^2 2x}, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$.

3. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[\sin 4(x+y)-\sin 4(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_1[\cos 4(x+y)-\cos 4(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_2[\sin 2(x+y)-\sin 2(x-y)]\,dx\,dy \\ & + A_3[\cos 2(x+y)-\cos 2(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $\left(0, \frac{1}{\sin^2 2y}\right)$.

4. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0\left[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right]dx\,dy \\ & + A_1[(x+y)^2-(x-y)^2]\,dx\,dy \\ & + A_2[(x+y)^4-(x-y)^4]\,dx\,dy \\ & + A_3[(x+y)^6-(x-y)^6]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)$.

5. $$\left\{\begin{aligned} ds^2 = {} & A_0[(x+y)^4-(x-y)^4]\,dx\,dy \\ & + A_1[(x+y)^3-(x-y)^3]\,dx\,dy \\ & + A_2[(x+y)^2-(x-y)^2]\,dx\,dy \\ & + A_3[(x+y)-(x-y)]\,dx\,dy. \end{aligned}\right.$$

Coefficients de transformation $\left(0, \frac{1}{y^2}\right)$.

7. Si l'on essayait d'appliquer la même remarque aux Tableaux des ds^2 de révolution, on ne trouverait rien de nouveau; ces ds^2 se reproduisent, en effet, les uns les autres par réciprocité, sauf ceux du Tableau I qui sont réciproques à des éléments du plan. Les Tableaux VI et VII nous présentent seuls des solutions nouvelles.

Tous les éléments du Tableau VII sont des formes essentielles, qui admettent comme formes singulières les éléments du Tableau VI. Sauf toutefois le dernier élément de ce dernier Tableau qui est de révolution. Ainsi :

VI_1 admet	comme forme essentielle	VII_1,
VI_2 et VI_4 admettent	»	VII_2,
VI_3 admet	»	VII_3,
VI_5 admet	»	VII_4.

Il est à remarquer que le dernier type VII_5 du Tableau VII n'admet aucune forme singulière.

Ces divers résultats s'obtiennent sans difficulté; il suffit d'effectuer pour chaque ds^2 la transformation (7) en prenant pour X, Y les expressions les plus générales possibles.

Par exemple, le ds^2 VII_5 admet les coefficients de transformation $\left(0, \frac{1}{y^2}\right)$; ses variables essentielles sont données par les quadratures

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{m}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{m + \frac{n}{y^2}}}; \tag{20}$$

changer x', y' en $\frac{x'}{\sqrt{m}}$, $\frac{y'}{\sqrt{m}}$ est sans importance; nous pourrons donc toujours supposer que m, qui ne saurait être nul, est égal à 1. Les formules (20) deviennent

$$x' = x, \qquad y' = \sqrt{y^2 + n}, \tag{21}$$

en négligeant des constantes additives sans importance. Si l'on introduit ces nouvelles variables dans le ds^2 VII_5, on trouve que ses quatre coefficients (A_0, A_1, A_2, A_3) doivent être remplacés par les suivants $(A_0, A_1, A_2 - nA_0, A_3 - nA_1)$, en même temps que x, y par x', y'. Le type n'est donc pas changé et l'on reconnaît ainsi que VII_5 est un type essentiel, sans type singulier.

8. Le calcul analogue pour le passage de VI_1 à VII_1 est plus compliqué; il offre un exemple intéressant de calcul de fonctions elliptiques.

Considérons le type VII_1, on constate que son type singulier VI_1 peut recevoir la forme

$$(22)\qquad \left(-\frac{A_0}{\sin^2\frac{x-y}{2}}+\frac{A_1}{\sin^2\frac{x+y}{2}}+\frac{A_2}{\cos^2\frac{x+y}{2}}-\frac{A_3}{\cos^2\frac{x-y}{2}}\right)\frac{dx\,dy}{4}$$

et que, par un choix convenable des variables, on peut aussi l'écrire

$$(23)\qquad \left[-\frac{A_0}{(u-v)^2}+\frac{A_1}{(u+v)^2}+\frac{A_2}{(1-uv)^2}-\frac{A_3}{(1+uv)^2}\right]du\,dv.$$

Ce ds^2 n'est autre que celui qui a été considéré à la page 215 du Tome II. Il présente une propriété remarquable qui consiste en ce que, *si l'on échange entre eux les coefficients* A_0, A_1, A_3, A_4 *d'une façon quelconque, le ds^2 reste équivalent à lui-même :* les transformations correspondantes effectuées sur les variables u, v forment un groupe de substitutions linéaires, savoir

$$\left(u'=u\sqrt{-1},\qquad v'=-v\sqrt{-1}\right),$$
$$\left(u'=u\sqrt{-1},\qquad v'=\ \ v\sqrt{-1}\right),$$
$$\left(u'=\frac{u+1}{u-1},\qquad v'=\frac{v+1}{v-1}\right).$$

Si, dans le type VII_1, on change les invariants g_2, g_3 des fonctions elliptiques, ce type reste équivalent à lui-même. Les divers types VII_1 ne diffèrent les uns des autres que par les valeurs des constantes A_0, A_1, A_2, A_3, *entre lesquelles il n'existe aucune relation d'ordre* et qui interviennent symétriquement. Nous leur donnons le nom d'*invariants* du ds^2.

9. Si l'on cherche la condition pour qu'un ds^2 de la forme VII_1 admette pour ses géodésiques une transformation infinitésimale qui ne conserve ni les lignes de longueur nulles ni un réseau orthogonal de coniques géodésiques, on trouve qu'il faut et il suffit que l'un des invariants soit nul, par exemple $A_0=0$, et que les trois autres vérifient une équation de la forme

$$\pm\sqrt{A_1}\pm\sqrt{A_2}\pm\sqrt{A_3}=0$$

Tout ds^2 réductible à l'une des formes du Tableau VII se trouve être représentable géodésiquement (n° 597 et suivants) sur un ds^2 du type VII_1. On voit que l'on connaît ainsi tous les types du Tableau VII qui admettent des transformations infinitésimales de leurs géodésiques.

Cette remarque conduit à la solution complète du problème par-

tiellement résolu par M. Lie des géodésiques à transformations infinitésimales.

10. Nous allons actuellement montrer que les Tableaux formés ci-dessus fournissent la solution complète du problème que nous nous sommes proposé.

Il s'agit, au fond, de l'intégration complète de l'équation $\Omega = 0$. Pour les équations de cette nature, Abel propose d'éliminer toutes les fonctions inconnues, sauf deux, entre l'équation proposée et celles que l'on en déduit par différentiation. Les deux fonctions conservées devront dépendre d'arguments différents z et t. En laissant constant l'un des arguments, t par exemple, il reste une ou plusieurs équations différentielles que doit vérifier la fonction unique de z qui a été conservée. C'est ainsi, par exemple, que l'équation (17) a lieu seulement entre X_1 et Y_1; en laissant x_1 constant, nous obtiendrons une équation différentielle pour Y_1. Mais cette équation est très compliquée. La forme simple de l'équation $\Omega = 0$ se prête par contre à une *étude directe* des fonctions X, Y, X_1, Y_1 et à leur détermination complète.

Nous démontrerons en premier lieu que *ces quatre fonctions sont uniformes dans tout le plan et ne peuvent avoir à distance finie d'autre singularité que des pôles doubles à résidu nul.*

Les démonstrations, dans le genre de celle que nous allons exposer, exigent des précautions particulières, dont l'oubli enlèverait toute valeur au raisonnement; aussi allons-nous préciser, pour commencer, ce que nous entendons par un système de solutions de l'équation $\Omega = 0$.

Les fonctions X, Y, X_1, Y_1 seront avant tout des *fonctions analytiques* de leurs arguments, au sens que M. Méray, en France, et M. Weierstrass, en Allemagne, ont précisé; c'est-à-dire que, pour chacune de ces fonctions, il existera une région du plan affectée, s'il y a lieu, de coupures ou de singularités isolées, mais autour de chaque point z_0 de laquelle, sauf aux points singuliers, la fonction soit représentable par une série entière en $z - z_0$, convergente dans un cercle de rayon non infiniment petit. Tel est le cas des intégrales des équations différentielles, et tel est par conséquent le nôtre, puisque la méthode d'Abel permet de former pour chacune des fonctions une équation différentielle qu'elle doit vérifier.

Appelons $\mathfrak{R}_X$, $\mathfrak{R}_Y$, $\mathfrak{R}_{X_1}$, $\mathfrak{R}_{Y_1}$ les régions du plan où sont définies les fonctions X, Y, X_1, Y_1 respectivement. L'équation $\Omega = 0$ suppose entre les arguments x, y, x_1, y_1 les relations

$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}; \tag{24}$$

il faut donc admettre qu'il existe dans $\mathcal{R}_X$ une région $\mathcal{S}_X$ et dans $\mathcal{R}_Y$ une région $\mathcal{S}_Y$, telles que si x est dans $\mathcal{S}_X$ et y dans $\mathcal{S}_Y$ les points x_1, y_1 qui leur correspondent par les formules (24) sont dans les régions $\mathcal{R}_{X_1}$, $\mathcal{R}_{Y_1}$ et telles, en outre, que Ω y est nul identiquement.

Prenons alors un point x^0 dans $\mathcal{S}_X$, un point y^0 dans $\mathcal{S}_Y$ de manière à éviter pour x^0, y^0 et pour $x_1^0 = \frac{x^0+y^0}{\sqrt{2}}$, $y_1^0 = \frac{x^0-y^0}{\sqrt{2}}$ les positions singulières. On pourra tracer autour de x^0 comme centre un cercle à l'intérieur duquel X est représentable par une série entière en $x-x^0$; on pourra même augmenter le rayon du cercle de façon à y laisser pénétrer des pôles de X s'il s'en présente, mais en s'arrêtant assez à temps pour exclure du cercle toute autre espèce de singularité. La même chose peut être dite pour Y, X_1, Y_1.

Les points x^0, y^0, x_1^0, y_1^0 sont ainsi les centres de cercles C, C', C_1, C_1' de rayons ρ, ρ', ρ_1, ρ_1', à l'intérieur desquels les fonctions X, Y, X_1, Y_1 sont respectivement des fonctions uniformes, dénuées de singularités autres que des pôles.

Il faut bien observer que nous ne savons pas *a priori* si les cercles C, C' sont entièrement compris à l'intérieur des régions $\mathcal{S}_X$, $\mathcal{S}_Y$; mais on peut au moins affirmer l'existence de cercles D, D' concentriques aux cercles C, C', intérieurs respectivement à ces cercles et aux régions $\mathcal{S}_X$, $\mathcal{S}_Y$.

Je dirai que le système des valeurs x, y, x_1, y_1 appartient au champ $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho_1')$ si ces valeurs vérifient les conditions suivantes :

1° Les relations

$$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}};$$

2° Les inégalités

$$|x-x^0| < \rho, \qquad |y-y^0| < \rho',$$
$$|x_1-x_1^0| < \rho_1 \qquad |y_1-y_1^0| < \rho_1',$$

en sorte que les points représentatifs des variables x, y, x_1, y_1 sont respectivement intérieurs aux cercles C, C', C_1, C_1'.

Présentons quelques remarques relatives au champ $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho_1')$.

Soit x', y', x_1', y_1' un système de valeurs appartenant au champ et que nous représentons par quatre points dans les plans représentatifs.

Sur le segment rectiligne $x^0 x'$ je prends un point $\bar{x}$ tel que le rapport des longueurs $\frac{x^0\bar{x}}{x^0x'} = \lambda$; λ est compris entre o et 1. De même je

prends sur $y^0 y'$ un point $\overline{y}$ tel que $\dfrac{y^0 \overline{y}}{y^0 y'} = \lambda$, et je pose alors

$$\overline{x_1} = \frac{\overline{x} + \overline{y}}{\sqrt{2}}, \qquad \overline{y_1} = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{2}}.$$

Il est clair que le système des valeurs $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{x_1}, \overline{y_1})$ est intérieur au champ $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1)$.

Seconde remarque : Comme l'on exclut le cas où le système des valeurs x', y', x_1, y_1 seraient sur la limite du champ, les quatre différences

$$|x' - x^0| - \rho, \quad |y' - y^0| - \rho',$$
$$|\overline{x' - x^0} + \overline{y' - y^0}| - \sqrt{2}\rho_1, \quad |\overline{x' - x_0} - \overline{y' - y_0}| - \sqrt{2}\rho'_1$$

sont toutes négatives et *aucune n'est nulle.*

Appelons 2ε une quantité positive inférieure à la plus petite des valeurs absolues de ces différences; les expressions

$$(25) \qquad |x' - x^0| + \varepsilon - \rho < 0, \qquad |y' - y^0| + \varepsilon - \rho' < 0,$$

$$(25') \qquad \left\{ \begin{array}{l} |\overline{x' - x^0} + \overline{y' - y_0}| + 2\varepsilon - \sqrt{2}\rho_1 < 0, \\ |\overline{x' - x^0} - \overline{y' - y^0}| + 2\varepsilon - \sqrt{2}\rho'_1 < 0 \end{array} \right.$$

sont encore toutes négatives.

Cela posé, décrivons autour des centres $\overline{x}$, $\overline{y}$ déjà construits deux cercles $D_{\overline{x}}$, $D_{\overline{y}}$ de rayon ε; prenons dans $D_{\overline{x}}$ un point x et dans $D_{\overline{y}}$ un point y, posons ensuite

$$x_1 = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = \frac{x - y}{\sqrt{2}};$$

je dis que le système de valeurs (x, y, x_1, y_1) appartient au champ $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1)$.

On a, en effet,

$$|x - x^0| = |x - \overline{x} + \overline{x} - x^0| < |x - \overline{x}| + |\overline{x} - x^0|,$$

mais, par hypothèse, on a

$$|x - \overline{x}| < \varepsilon, \qquad |\overline{x} - x^0| \leqq |x' - x^0|,$$

donc

$$|x - x^0| < |x' - x^0| + \varepsilon,$$

or le second membre est inférieur à ρ d'après les inégalités (25). On prouve de même que $|y - y^0| < \rho'$ et que $|x_1 - x_1^0| < \rho_1$, $|y_1 - y_1^0| < \rho'_1$.

Nous allons déduire de ces diverses remarques la proposition suivante :

La fonction Ω *supposée nulle quand* x *est intérieur à* S_X *et* y *à* S_Y *se trouve nulle dans tout le champ* $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1)$.

En effet, soit x', y', $x'_1 = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, $y'_1 = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$ un système de valeurs pris dans le champ et ε le nombre positif dont il vient d'être question.

Je divise le segment x^0x' en m segments égaux, et de même le segment y^0y'. J'appelle

$$\begin{array}{cccccc} x^0, & x^1, & x^2, & \ldots, & x^{m-1}, & x', \\ y^0, & y^1, & y^2, & \ldots, & y^{m-1}, & y' \end{array}$$

les points de division et je suppose m assez grand pour que la distance de deux points consécutifs soit, pour les deux segments, moindre que ε. J'observe que, d'après la première remarque, le système de valeurs

$$x^i, \quad y^i, \quad x_1^i = \frac{x^i+y^i}{\sqrt{2}}, \quad y_1^i = \frac{x^i-y^i}{\sqrt{2}},$$

est intérieur au champ $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1)$. De plus, d'après la seconde reremarque, si l'on décrit les cercles D_{x^i}, D_{y^i} de centres x^i, y^i et de rayon ε, un point x pris dans D_{x^i} et un point y pris dans D_{y^i} définissent un système de valeurs x, y, x_1, y_1 intérieur au champ.

Cela posé, nous aurons d'abord un cercle D_{x^0} et un cercle D_{y^0} de centres x^0, y^0. Ces cercles sont concentriques aux cercles D, D′ déjà définis et à l'intérieur desquels la fonction Ω est nulle.

Si donc D et D′ comprennent D_{x^0}, D_{y^0}, la fonction Ω est nulle dans ces deux derniers cercles, c'est-à-dire, si x est pris quelconque dans D_{x^0} et y quelconque dans D_{y^0}. Par contre, si D_{x^0} et D_{y^0} sont l'un ou l'autre (ou bien l'un et l'autre) plus grands que leurs cercles concentriques D, D′, la fonction Ω qui se trouve nulle dans D et D′, c'est-à-dire dans des portions finies de D_{x^0} et de D_{y^0}, et qui de plus est uniforme dans ces cercles devra être nulle dans toute leur étendue. Ainsi, dans tous les cas, Ω est nulle dans les cercles D_{x^0}, D_{y^0}.

Passons aux cercles D_{x^1}, D_{y^1}. La fonction Ω est encore une fonction uniforme de x, y dans ces deux cercles; de plus, elle est nulle dans les portions finies que ces cercles ont en commun avec les deux précédents (la distance des centres étant plus petite que la somme des rayons qui sont du reste égaux); donc la fonction Ω est encore nulle quand x

est pris quelconque dans D_{x^1} et y quelconque dans D_{y^1}. On continuera ainsi de proche en proche jusqu'aux derniers cercles $D_{x'}$, $D_{y'}$.

La fonction Ω sera nulle dans ces deux cercles et, en particulier, au point (x', y'), ce qui démontre le théorème.

Il est maintenant facile de déduire de ce théorème la proposition fondamentale que nous avons en vue.

Désignons par σ_1 la plus petite des quantités ρ_1, ρ'_1 et appelons E un cercle, concentrique au cercle C, de rayon $\frac{7}{5}\sigma_1$; appelons aussi E′ le cercle concentrique au cercle C′ et de rayon $\left(\sqrt{2}-\frac{7}{5}\right)\sigma_1$.

On constate aisément qu'il suffit que x soit dans le cercle E et y dans le cercle E′ pour que les points $x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ soient intérieurs respectivement aux cercles C_1 et C'_1. On a, en effet, par hypothèse,

$$|x - x^0| < \frac{7}{5}\sigma_1, \qquad |y - y_0| < \left(\sqrt{2}-\frac{7}{5}\right)\sigma_1,$$

donc *a fortiori*

$$|x - x^0 + y - y^0| < |x - x_0| + |y - y^0| < \sqrt{2}\,\sigma_1$$

ou

$$|x_1 - x_1^0| = \left|\frac{x-x_0}{\sqrt{2}} + \frac{y-y_0}{\sqrt{2}}\right| < \sigma_1 \leqq \rho_1;$$

on prouve de même que $|y_1 - y_1^0| < \rho'_1$.

Prenons alors y', y'', y''', trois positions de y, dans le plus petit des cercles concentriques C′, E′ et x dans le plus petit des cercles concentriques C, E. Les trois systèmes de valeurs

$$\begin{array}{llll} x, & y', & \dfrac{x+y'}{\sqrt{2}}, & \dfrac{x-y'}{\sqrt{2}}, \\ x, & y'', & \dfrac{x+y''}{\sqrt{2}}, & \dfrac{x-y''}{\sqrt{2}}, \\ x, & y''', & \dfrac{x+y'''}{\sqrt{2}}, & \dfrac{x-y'''}{\sqrt{2}} \end{array}$$

sont intérieurs au champ $\mathfrak{S}(\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1)$, car il suffit que x, y soient intérieurs à E, E′ respectivement pour que x_1, y_1 soient intérieurs à C_1, C'_1.

Désignons par $f(x, y)$ la fonction Ω; nous sommes en droit de poser les équations

$$f(x, y') = 0, \qquad f(x, y'') = 0, \qquad f(x, y''') = 0.$$

Ce sont là trois équations linéaires X, X′, X″, qui pourront être résolues par rapport à ces quantités, si un certain déterminant Ξ n'est pas nul. Réservons ce cas; nous aurons, en particulier,

$$X = \mathcal{R}(x),$$

où $\mathcal{R}$ est composé rationnellement avec les fonctions $X_1\left(\frac{x+y'}{\sqrt{2}}\right)$, $X_1\left(\frac{x+y''}{\sqrt{2}}\right)$, $X_1\left(\frac{x+y'''}{\sqrt{2}}\right)$, $Y_1\left(\frac{x-y'}{\sqrt{2}}\right)$, $Y_1\left(\frac{x-y''}{\sqrt{2}}\right)$, $Y_1\left(\frac{x-y'''}{\sqrt{2}}\right)$, $Y(y')$, $Y(y'')$, $Y(y''')$ et leurs dérivées. Si donc on laisse y', y'', y''' constants, $\mathcal{R}(x)$ est une fonction uniforme de x en même temps que les six premières de ces fonctions, c'est-à-dire, eu égard au choix de y', y'', y''', tant que x reste intérieur au cercle E. La fonction $\mathcal{R}(x)$ est donc uniforme et dénuée de points singuliers autres que des pôles dans tout le cercle E.

Il y a deux cas à distinguer :

1° Le cercle E est intérieur ou égal au cercle C; nous sommes alors en droit d'écrire

$$\rho \geqq \frac{7}{5}\sigma_1;$$

2° Le cercle E est extérieur au cercle C; la fonction X est uniforme dans le cercle C et égale dans tout ce cercle à une fonction $\mathcal{R}(x)$ que nous savons être uniforme non seulement dans le cercle C, mais encore dans le cercle plus grand E. La fonction $\mathcal{R}(x)$ permet donc de prolonger la fonction X dans tout le cercle E. Reste à savoir si cette fonction ainsi prolongée vérifie bien encore l'équation $\Omega = 0$.

Nous voyons bien que le rayon d'uniformité ρ de X peut être remplacé par le rayon plus grand $\frac{7}{5}\sigma_1$, mais nous ne savons pas si Ω est nulle dans le champ $\mathfrak{S}\left(\frac{7}{5}\sigma_1, \rho', \rho_1, \rho'_1\right)$. Or, c'est à quoi répond le théorème qui a été établi plus haut. En vertu de ce théorème, la fonction Ω, qui est déjà nulle autour de x^0, y^0, doit l'être encore dans tout le champ d'uniformité des fonctions X, Y, X_1, Y_1.

En résumé, nous voyons que, si ρ est plus petit que $\frac{7}{5}\sigma_1$, la fonction X, qui vérifie l'équation $\Omega = 0$, est susceptible d'un prolongement analytique dans l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{7}{5}\sigma$, sans cesser de vérifier l'équation; nous pouvons donc écrire dans tous les cas,

ρ étant le rayon d'uniformité de X,

$$\rho \geqq \frac{7}{5}\sigma_1.$$

On prouvera de même qu'on peut prolonger au besoin la fonction Y de manière à avoir

$$\rho' \geqq \frac{7}{5}\sigma_1,$$

et cela sous le bénéfice de l'hypothèse qu'un déterminant analogue à Ξ, et que j'appelle H, ne soit pas nul.

Maintenant, la symétrie de l'équation $\Omega = 0$ nous prouve que l'on peut permuter dans les raisonnements les couples de variables x, y et x_1, y_1 ainsi que les couples de fonctions X, Y et X_1, Y_1. Puisque, dans l'état actuel, on a

$$\rho \geqq \frac{7}{5}\sigma_1, \qquad \rho' \geqq \frac{7}{5}\sigma_1,$$

en désignant par σ la plus petite des quantités ρ, ρ', on prouvera que l'on peut prolonger X_1, Y_1 de manière que les nouveaux rayons de convergence $\overline{\rho_1}$, $\overline{\rho'_1}$ de X_1, Y_1 soient au moins égaux à $\frac{7}{5}\sigma$, c'est-à-dire au moins égaux à $\left(\frac{7}{5}\right)^2\sigma_1$, car σ est au moins égal à $\frac{7}{5}\sigma_1$. Si l'on désigne par $\overline{\sigma_1}$ la plus petite des quantités ρ_1, ρ'_1, on aura donc

$$\overline{\sigma_1} \geqq \left(\frac{7}{5}\right)^2 \sigma_1.$$

Si l'on répète indéfiniment ce raisonnement en prolongeant tour à tour le couple X, Y et le couple X_1, Y_1, on voit que les nombres σ, σ_1 croissent indéfiniment, c'est-à-dire que les fonctions X, Y, X_1, Y_1, ont autour de x^0, y^0, x_1^0, y_1^0 des rayons d'uniformité infinis. Les formules qui servent à prolonger les fonctions nous apprennent de plus que nos quatre fonctions n'ont, à distance finie, d'autre singularité que des pôles (¹).

Il y a un cas où la démonstration précédente tombe en défaut, c'est celui ou l'un des déterminants Ξ, H ou bien l'un des deux déterminants analogues Ξ_1, H_1 relatifs aux fonctions X_1, Y_1 serait nul. On constate que la raison de symétrie et le changement de y en $-y$ permettent de s'en tenir au cas où c'est Ξ qui est nul. Or $\Xi = 0$ est une

(¹) Ce théorème et sa démonstration sont susceptibles d'une extension que j'ai énoncée dans les *Comptes rendus*.

équation facile à discuter et le résultat de la discussion est que le théorème ne cesse pas d'être vrai.

11. Les pôles des fonctions X, Y, X_1, Y_1 possèdent des propriétés déterminées que nous allons démontrer. En premier lieu, on a ce théorème :

Tout pôle a de toute fonction X, Y, X_1, Y_1 *est double et le résidu qui lui est relatif est nul, en sorte que, dans le voisinage du pôle a la fonction possède la forme*

$$\frac{A}{(z-a)^2} + E(z-a),$$

où $E(z-a)$ représente une série entière en $z-a$. Pour démontrer ce théorème pour la fonction X on posera, m étant l'ordre du pôle

$$X(x) = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + E(x-a),$$

où $E(x-a)$ est encore une série entière en $x-a$; en portant cette valeur dans Ω, on aura un résultat de la forme

$$\Omega = \frac{P_{m+2}}{(x-a)^{m+2}} + \frac{P_{m+1}}{(x-a)^{m+1}} + \ldots + \frac{P_2}{(x-a)^2} + \frac{P_1}{x-a} + E(x-a).$$

Comme Ω doit être nul, il faut, avant tout, que l'on ait

$$P_{m+2} = P_{m+1} = \ldots = P_2 = P_1 = 0,$$

et notons, en passant, que *ces conditions expriment seulement que* Ω *reste fini, quel que soit* y, *pour* $x = a$.

Or on trouve tout d'abord

$$P_{m+2} = m(m+1)A_m \left[X_1\left(\frac{a+y}{\sqrt{2}}\right) - Y_1\left(\frac{a-y}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

ce qui donne la *condition très importante*

$$X_1\left(\frac{a+y}{\sqrt{2}}\right) - Y_1\left(\frac{a-y}{\sqrt{2}}\right) = 0. \tag{26}$$

On trouve ensuite

$$P_{m+1} = \frac{m(m-2)}{\sqrt{2}} A_m \left[X'_1\left(\frac{a+y}{\sqrt{2}}\right) - Y'_1\left(\frac{a-y}{\sqrt{2}}\right) \right] = 0.$$

Si la quantité entre crochets est nulle, on voit, d'après le résultat de la différentiation de l'équation (26) que X_1, Y_1 sont constants. Le ds^2

est celui du plan; or sur le ds^2 du plan, le théorème se vérifie (*voir* le Tableau III). Ce cas exclu, il reste donc

$$m - 2 = 0,$$

le pôle est double.

En outre, on trouve pour P_m, c'est-à-dire P_2, cette expression

$$P_2 = -\frac{A_1}{\sqrt{2}}\left[X'_1\left(\frac{a+y}{\sqrt{2}}\right) - Y'_1\left(\frac{a-y}{\sqrt{2}}\right)\right];$$

donc $P_2 = 0$ nous donne $A_1 = 0$, en mettant de côté le cas du plan pour lequel, du reste, le théorème est vrai. Quant à P_1, il se trouve nul de lui-même.

Le théorème est donc démontré et, en outre, nous pouvons ajouter que, *si, pour un pôle double a, à résidu nul, de $X(x)$ a lieu la relation* (26), *la fonction Ω reste finie d'elle-même pour $x = a$, quel que soit y.*

Ajoutons que l'on prouve les mêmes propositions pour les fonctions Y, X_1, Y_1. Par exemple, si b est un pôle de Y, on doit avoir l'équation analogue à (26),

$$X_1\left(\frac{x+b}{\sqrt{2}}\right) - Y_1\left(\frac{x-b}{\sqrt{2}}\right) = 0. \tag{27}$$

L'existence de plusieurs pôles entraîne la périodicité. En partant de l'équation (26) ou de l'équation (27) on prouvera les théorèmes suivants :

Si a, a' sont deux pôles de X ou deux pôles de Y, l'expression $\sqrt{2}(a - a')$ est une période des fonctions X_1 et Y_1.

Si a est un pôle de X et b un pôle de Y, les fonctions de z

$$X_1\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} + z\right), \qquad Y_1\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}} + z\right)$$

sont paires.

Si zéro est un pôle de Y, les fonctions $X_1(z)$, $Y_1(z)$ sont identiques.

Ce théorème est curieux, car il caractérise les formes de Liouville du type

$$[\varphi(x+y) - \varphi(x-y)]\,dx\,dy.$$

Il est clair que dans ces divers théorèmes on peut permuter les couples de fonctions X, Y et X_1, Y_1.

12. Je vais montrer l'usage que l'on peut en faire pour déterminer toutes les solutions doublement périodiques de l'équation $\Omega = 0$.

Il résulte d'abord des théorèmes ci-dessus que, *si* a, a', a'' *sont trois pôles de* X *ou trois pôles de* Y *tels que le rapport* $\frac{a'-a}{a''-a}$ *ne soit pas un nombre commensurable, les fonctions* X_1, Y_1, X, Y *sont doublement périodiques.*

En effet, les fonctions X_1, Y_1, uniformes dans tout le plan, admettent comme périodes $\sqrt{2}(a'-a)$, $\sqrt{2}(a''-a)$; ces expressions étant incommensurables entre elles, X_1, Y_1 sont des fonctions doublement périodiques.

Ces fonctions admettent nécessairement des pôles, soient a_1 un pôle de X_1 et ω, ω' un couple de périodes primitives de X_1; comme $a_1+\omega$, $a_1+\omega'$ sont encore deux pôles de X_1, il en résulte que

$$\sqrt{2}[(a_1+\omega)-a_1] = \sqrt{2}\,\omega \quad \text{et} \quad \sqrt{2}\,\omega'$$

sont des périodes par X, Y qui sont, dès lors, aussi doublement périodiques.

Il convient d'observer qu'on peut ajouter, sans inconvénient, à x, y, des constantes arbitraires sans changer l'aspect des fonctions X, Y, X_1, Y_1. Nous profiterons de cette remarque pour amener X et Y à avoir zéro comme pôle. Dans ces conditions les fonctions X_1, Y_1 sont identiques et de plus sont des fonctions paires. Posons alors

$$X_1(x_1) = F(\sqrt{2}\,x_1) = F(x+y),$$
$$Y_1(y_1) = F(\sqrt{2}\,y_1) = F(x-y).$$

On constate que, si ω est une période pour X_1, $\omega\sqrt{2}$ est une période pour $F(z)$.

L'avantage de ces notations est d'amener F, X, Y à avoir les mêmes périodes.

Soient $a, a', a'', \ldots$ les pôles de X, autres que zéro, $b, b', b'', \ldots$ les pôles de Y. Les expressions telles que $\sqrt{2}\,a$, $\sqrt{2}\,b$ sont des périodes pour X_1; donc $2a$, $2a'$, $\ldots$, $2b$, $2b'$, $\ldots$ sont des périodes pour $F(z)$.

Désignons par $2\omega_1$, $2\omega_2$ un couple de périodes primitives de $F(z)$, nous devrons avoir des relations de la forme

$$\begin{array}{ll} 2a = 2m\,\omega_1 + 2n\,\omega_2, & 2b = 2p\,\omega_1 + 2q\,\omega_2, \\ 2a' = 2m'\,\omega_1 + 2n'\,\omega_2, & 2b' = 2p'\,\omega_1 + 2q'\,\omega_2, \\ 2a'' = 2m''\,\omega_1 + 2n''\,\omega_2, & 2b'' = 2p''\,\omega_1 + 2q''\,\omega_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

où $m, n, m', n', \ldots; p, q, p', q', \ldots$ sont des nombres entiers. Les quantités $a, a', \ldots, b, b', \ldots$ sont donc de la forme générale

$$\mu\omega_1 + \nu\omega_2,$$

où μ, ν sont des entiers; or, à des multiples près des périodes, les expressions de cette forme sont égales à l'une de ces quantités

$$0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3,$$

où $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$.

Soit maintenant a_1 un pôle de X_1.

Comme $2\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}$; $2\frac{\omega_2}{\sqrt{2}}$ sont deux périodes primitives de X_1, il en résulte que $\sqrt{2}\left[\left(a_1 + 2\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}\right) - a_1\right] = 2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont des périodes pour X et Y.

Ainsi X et Y admettent toutes les périodes de F.

Nous pouvons maintenant construire l'expression générale de X, Y au moyen de la fonction $p(z)$, qui admet $2\omega_1$, $2\omega_2$ pour couple de périodes primitives.

Dans le voisinage de son pôle zéro, X a la forme $\frac{A_0}{x^2} + E(x)$; les autres pôles de X sont congrus à l'une des quantités $\omega_1, \omega_2, \omega_3$; dans le voisinage de ω_i X aura donc la forme $\frac{A_i}{(x-\omega_i)^2} + E(x-\omega_i)$; on prendra $A_i = 0$ si ω_i n'est pas un pôle. Formons alors l'expression

$$X - A_0\,p(x) - A_1\,p(x+\omega_1) - A_2\,p(x+\omega_2) - A_3\,p(x+\omega_3),$$

qui admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, qui est uniforme dans tout le plan et, grâce au choix des coefficients, n'a plus de pôles à distance finie. Cette fonction ne peut être qu'une constante. On a donc

$$X = A_0\,p(x) + A_1\,p(x+\omega_1) + A_2\,p(x+\omega_2) + A_3\,p(x+\omega_3) + A_4,$$
$$Y = B_0\,p(y) + B_1\,p(y+\omega_1) + B_2\,p(y+\omega_2) + B_3\,p(y+\omega_3) + B_4.$$

Nous construisons de même la forme générale de $F(z)$. Si k est un pôle de $F(z)$, $\frac{k}{\sqrt{2}}$ est un pôle de X_1 et l'on a dès lors, d'après un théorème déjà démontré,

$$X\left(\frac{\frac{k}{\sqrt{2}} + y_1}{\sqrt{2}}\right) = Y\left(\frac{\frac{k}{\sqrt{2}} - y_1}{\sqrt{2}}\right),$$

ou plus simplement, t étant l'argument variable,

$$Y(t) = X(k - t). \tag{28}$$

Les pôles de X, Y sont congrus à l'une des quantités o, ω_1, ω_2, ω_3; ceux de $X(k - t)$ sont donc congrus à l'une des quantités

$$k, \quad k - \omega_1, \quad k - \omega_2, \quad k - \omega_3.$$

L'identité précédente exige donc que k lui-même soit congru à o, ω_1, ω_2 ou ω_3. Donc, tout pôle k de $F(z)$ est congru à l'une de ces quatre quantités et l'on en déduira, comme pour X, Y, cette forme générale de $F(z)$,

$$F(z) = L_0\, p(z) + L_1\, p(z + \omega_1) + L_2\, p(z + \omega_2) + L_3\, p(z + \omega_3) + L_4.$$

Ayant ainsi la forme générale de X, Y, F, la coordination des résultats n'offre plus aucune difficulté.

On remarque d'abord qu'on peut supposer toujours L_0 différent de zéro; alors X, Y sont deux fonctions identiques, paires.

Si L_1, L_2, L_3 sont nuls, on a les ds^2 de courbure constante et X, Y vérifient l'équation quelles que soient les constantes A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Si, outre L_0, L_1 est aussi différent de zéro, on constate que l'on doit avoir

$$X(t) = Y(t + \omega_1), \tag{29}$$

par application au couple des fonctions X, Y et au pôle ω_1 de $F(z)$ du théorème exprimé par l'équation (28). L'équation (29) s'écrit

$$\begin{aligned} &A_0\, p(t) + A_1\, p(t + \omega_1) + A_2\, p(t + \omega_2) + A_3\, p(t + \omega_3) \\ &\quad = A_0\, p(t + \omega_1) + A_1\, p(t + 2\omega_1) + A_2\, p(t + \omega_1 + \omega_2) + A_3\, p(t + \omega_1 + \omega_3) \end{aligned}$$

ou encore, eu égard à la relation $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$,

$$= A_0\, p(t + \omega_1) + A_1\, p(t) + A_2\, p(t + \omega_3) + A_3\, p(t + \omega_2),$$

ce qui exige seulement $A_0 = 1$, $A_2 = A_3$. On retrouve le type essentiel de révolution.

Enfin, en supposant L_0, L_1, L_2 différents de zéro, on trouve qu'il faut avoir

$$Y(t) = X(t + \omega_1), \qquad Y(t) = X(t + \omega_2),$$

et le même calcul que ci-dessus donne $A_0 = A_1 = A_2 = A_3$; nous trouvons donc le ds^2 réciproque du ds^2 à courbure constante;

attendu que

$$A_0[p(t)+p(t+\omega_1)+p(t+\omega_2)+p(t+\omega_3)]=\frac{A_0}{4}p(2t).$$

Ainsi, il n'y a pas d'autres solutions doublement périodiques que celles qui ont été déjà obtenues.

13. Les solutions simplement périodiques ou rationnelles s'obtiennent par un procédé analogue. Il importe toutefois de remarquer que l'on peut s'en tenir à la recherche des types essentiels, ce qui simplifie déjà considérablement le problème.

Nous laisserons même de côté les ds^2 de révolution ou à courbure constante, qui ont été déjà obtenus.

Prenons une forme essentielle de notre ds^2, soit $X(x)$ un coefficient de transformation de ce ds^2; la variable ξ, définie par la quadrature

$$\xi=\int\frac{dx}{\sqrt{X+h}},$$

sera une variable essentielle, et si l'on pose $\Xi(\xi)=\frac{1}{X+h}$, $\Xi(\xi)$ sera un coefficient de transformation d'une autre forme essentielle du même ds^2.

Mais, d'après ce qui a été dit des formes essentielles, l'aspect analytique des fonctions $\Xi(\xi)$, $X(x)$ doit être le même; elles seront en même temps périodiques ou rationnelles.

En partant de là on parvient à démontrer que tout coefficient de transformation d'une forme essentielle a l'une des formes suivantes, en faisant abstraction des solutions doublement périodiques :

1° Ou bien une constante;

2° Ou bien $\frac{1}{x^2}$;

3° Ou bien $\frac{1}{\sin^2 x}$.

Il est ensuite facile de coordonner les résultats et d'établir qu'il n'existe pas de solutions en dehors de celles qui figurent au Tableau VII.

14. Je terminerai en faisant connaître un mode de représentation sur le plan des géodésiques des surfaces qui nous occupent et dans lequel ces géodésiques ont pour images les coniques d'un réseau tangentiel.

Si l'on considère le ds^2 contenu dans la formule

$$(30)\qquad \left[\frac{F(x)}{G(x)} - \frac{F(y)}{G(y)}\right]\left[\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)}\right],$$

où $F(x)$, $G(x)$ sont deux polynômes du quatrième degré, en essayant de le mettre sous la forme

$$[\varphi(x+y) - \varphi(x-y)]\, dx\, dy,$$

on se trouve amené par la discussion aux diverses formes du Tableau VII. Cela résulte d'ailleurs facilement du principe de réciprocité que nous avons appliqué aux ds^2 de courbure constante pour former le Tableau VII.

Or, il résulte de la forme (33) du nº 584 [III, p. 11] que les géodésiques de ce ds^2 auront l'équation finie que voici :

$$(31)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{G(x) + \rho F(x)}} + \int \frac{dy}{\sqrt{G(y) + \rho F(y)}} = \text{const.},$$

où ρ désigne une constante arbitraire.

Considérons dans un plan la conique C, représentée par l'équation

$$Y^2 - 4XZ = 0;$$

on vérifie cette équation en posant

$$X = t^2, \qquad Y = 2t, \qquad Z = 1.$$

Si d'un point $M(X, Y, Z)$ on mène les deux tangentes à la conique, les valeurs du paramètre t qui correspondent aux deux points de contact étant désignées par x, y, on trouve aisément que X, Y, Z s'expriment en x, y par les formules

$$(32)\qquad X = xy, \qquad Y = x + y, \qquad Z = 1.$$

Les paramètres x, y constituent un système de coordonnées du point M qui a été considéré pour la première fois par M. Darboux dans son Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces*. Nous allons introduire ces coordonnées dans la représentation des géodésiques.

Rappelons d'abord comment l'équation d'Euler s'intègre par le moyen d'un faisceau tangentiel de coniques. Soit l'équation d'une conique

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = 0;$$

si l'on y remplace X, Y, Z par leurs expressions (32), on trouve l'équation en coordonnées x, y de cette conique

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = {} & \mathrm{A}x^2y^2 + \mathrm{A}'(x+y)^2 + \mathrm{A}'' \\ & + 2\mathrm{B}(x+y) + 2\mathrm{B}'xy + 2\mathrm{B}''xy(x+y) = 0.\end{aligned}$$

Introduisons les notations de la forme adjointe

$$\begin{array}{lll} a = \mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2, & a' = \mathrm{A}''\mathrm{A} - \mathrm{B}'^2, & a'' = \mathrm{A}\mathrm{A}' - \mathrm{B}''^2, \\ b = \mathrm{B}'\mathrm{B}'' - \mathrm{A}\mathrm{B}, & b' = \mathrm{B}''\mathrm{B} - \mathrm{A}'\mathrm{B}', & b'' = \mathrm{B}\mathrm{B}' - \mathrm{A}''\mathrm{B}''; \end{array}$$

faisons en outre

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x) &= [\mathrm{B}''x^2 + (\mathrm{A}' + \mathrm{B}')x + \mathrm{B}]^2 - (\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}''x + \mathrm{A}')(\mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}x + \mathrm{A}'') \\ &= -a''x^4 + 2bx^3 - (a' + 2b')x^2 + 2b''x - a.\end{aligned}$$

On trouve alors que l'équation $\varphi(x, y) = 0$ peut s'écrire

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \mathrm{H}(x).$$

Mais, l'équation étant symétrique en x et y, on pourra écrire aussi

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \mathrm{H}(y).$$

Cela posé, concevons que le point $\mathrm{M}(x, y)$ décrive la conique représentée par l'équation $\varphi = 0$, nous aurons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0,$$

c'est-à-dire, eu égard aux équations ci-dessus,

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{H}(x)}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{\mathrm{H}(y)}},$$

ce qui est l'équation d'Euler.

Prenons réciproquement une équation d'Euler quelconque

$$(33)\qquad \frac{dx}{\sqrt{lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + p}} \pm \frac{dy}{\sqrt{ly^4 + my^3 + ny^2 + py + q}} = 0;$$

si on l'identifie avec l'équation précédente, on trouve

$$a'' = -l, \qquad a = -q, \qquad a' + 2b' = -n, \qquad 2b = m, \qquad 2b'' = p,$$

et nous trouvons ainsi que l'équation (33) est vérifiée en tous les

points (x, y) de la conique dont l'équation tangentielle serait

$$-(q\xi^2 + l\zeta^2 - m\eta\zeta + n\zeta\xi - p\xi\eta) + a'(\eta^2 - \xi\zeta) = 0. \tag{34}$$

Comme il figure dans cette équation une constante arbitraire a', on peut en conclure que les coniques contenues dans cette équation tangentielle fournissent l'intégrale générale de l'équation d'Euler proposée.

Il faut observer que les coniques dont (34) est l'équation tangentielle forment un faisceau tangentiel de coniques dont fait partie la conique C. Les coniques de ce faisceau sont donc inscrites dans un quadrilatère circonscrit à la conique C; les paramètres des points où C est touchée par les côtés de ce quadrilatère fixe sont les racines de l'équation

$$\mathrm{H}(t) = lt^4 + mt^3 + nt^2 + pt + q = 0.$$

Appliquons ceci à l'équation d'Euler (31) qui donne les géodésiques du ds^2 (30). Si l'on fait

$$\mathrm{F}(t) = lt^4 + mt^3 + nt^2 + pt + q,$$
$$\mathrm{G}(t) = l't^4 + m't^3 + n't^2 + p't + q',$$

et si l'on regarde ρ comme donné, il faudra dans l'équation (34) remplacer l par $l\rho + l'$, m par $m\rho + m'$, ..., ce qui donnera

$$\begin{aligned} &-(q\xi^2 + l\zeta^2 - m\eta\zeta + n\zeta\xi - p\xi\eta)\rho \\ &-(q'\xi^2 + l'\zeta^2 - m'\eta\zeta + n'\zeta\xi - p'\xi\eta) \\ &\qquad + a'(\eta^2 - \xi\zeta) = 0. \end{aligned}$$

On obtiendra ainsi, quand ρ, a' prendront toutes les valeurs possibles, un *réseau tangentiel* de coniques; et chaque conique de ce réseau, rapportée aux coordonnées x, y autour de la conique C, fournira une solution de l'équation (31). Nous nous trouvons donc avoir représenté sur le plan, point par point, la surface qui admet le ds^2 (30), de sorte que les géodésiques ont pour images les coniques de ce réseau tangentiel.

Nous nous bornerons ici à signaler les résultats suivants :

Si les coniques du réseau sont inscrites dans un triangle fixe, le ds^2 (30) *a sa courbure constante.*

Ce théorème est en relation étroite avec cet autre déjà connu que les surfaces de courbure constante peuvent seules avoir des droites comme images de leurs géodésiques sur un plan.

En effet, les coniques inscrites dans le triangle $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$

ont cette équation générale

$$\lambda\sqrt{X} + \mu\sqrt{Y} + \nu\sqrt{Z} = 0,$$

et il suffit de la transformation ponctuelle

$$X' = \sqrt{X}, \qquad Y' = \sqrt{Y}, \qquad Z' = \sqrt{Z}$$

pour transformer ces coniques dans les droites du plan.

Supposons maintenant que les coniques du réseau représentatif touchent deux droites fixes; *dans ce cas le* ds^2 (30) *convient à une surface de révolution.*

A l'égard des ds^2 de révolution à intégrales quadratiques, le lecteur démontrera facilement la proposition suivante, que l'on pourrait presque attribuer à M. Lie, tant ce géomètre s'en est approché :

Tous les ds^2 de révolution à intégrales quadratiques sont représentables géodésiquement les uns sur les autres.

Les ds^2 à intégrales quadratiques qui ne sont pas de révolution donnent lieu à un théorème analogue; chacun est représentable géodésiquement sur un ds^2 réductible au type VII_1.

NOTE III.

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE,

PAR M. E. COSSERAT.

1. Dans le Mémoire présenté en 1870 à l'Académie des Sciences et dont il a été question [II, p. 53], M. Moutard s'était proposé « l'étude minutieuse de la forme la plus élémentaire dont soit susceptible l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, à savoir : celle qui consiste en une relation unique entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes formées explicitement avec les trois variables, et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant d'ailleurs sous aucun signe d'intégration ».

La première Partie de ce Mémoire avait pour objet de démontrer que l'on peut former toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre et à deux variables indépendantes, susceptibles d'admettre une intégrale générale de cette espèce élémentaire, dès que l'on sait trouver toutes les équations linéaires du second ordre, de la forme considérée par Laplace, qui jouissent de la même propriété. M. Moutard énonce le résultat suivant :

Celles des équations cherchées qui ne sont réductibles, par un changement de variables, ni aux équations linéaires de Laplace, ni à l'équation de Liouville, sont toutes, en exceptant deux cas particulièrement simples, réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{A}e^z) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{B}e^{-z}),$$

où A *et* B *sont des fonctions des seules variables indépendantes assujetties elles-mêmes à vérifier certaines conditions; de plus, l'intégration de cette équation peut être ramenée à dépendre unique-*

ment de celle d'une équation linéaire de la forme considérée par Laplace, à savoir :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \log A}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + ABz.$$

L'exposition suivante, où l'on a mis à profit, en plusieurs points, des indications précieuses de M. Darboux, constitue le développement de cette proposition.

2. Remarquons d'abord que si l'intégrale générale de l'équation proposée est déterminée par une équation de la forme

$$F[x, y, z, \varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u), \psi_1(v), \psi_2(v), \ldots, \psi_n(v)] = 0,$$

où u et v sont deux fonctions données et distinctes de x, y, z et où φ_1 et ψ_1 sont deux fonctions arbitraires dont les dérivées successives sont désignées par $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m$ et par $\psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$, on peut effectuer un changement de variables consistant à prendre u et v pour nouvelles variables indépendantes; il nous suffira donc de chercher toutes les équations du second ordre admettant une intégrale générale de la forme

$$(1) \qquad z = f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

où α_1 désigne une fonction arbitraire de x dont les dérivées successives sont désignées par $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ et où β_1 désigne une fonction arbitraire de y dont les dérivées successives sont $\beta_1, \beta_2, \ldots$.

Il est clair que l'expression (1) ne peut vérifier une équation du second ordre que si cette dernière ne contient pas les dérivées r et t de z et est, par suite, de la forme

$$(2) \qquad s + \varphi(x, y, z, p, q) = 0.$$

Cherchons donc à déterminer toutes les équations de la forme (2) admettant comme intégrale une expression de la forme (1); et, à cet effet, substituons cette valeur (1) de z dans l'équation (2).

Convenons dès maintenant de la notation suivante : θ étant, d'une façon générale, une fonction formée avec x, y, α_1, β_1 et des dérivées de ces deux dernières, nous désignerons par

$$\frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{d\theta}{dy}, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2}, \quad \frac{d^2\theta}{dx\, dy}, \quad \frac{d^2\theta}{dy^2}, \quad \ldots$$

les dérivées successives de θ, prises en ayant égard aux différentes fonctions α_i, β_k qui y figurent.

Nous aurons, pour les dérivées p, q, s de la fonction z définie par l'équation (1), les valeurs suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} p = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}\alpha_{i+1}, \\ q = \dfrac{df}{dy} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \sum_k \dfrac{\partial f}{\partial \beta_k}\beta_{k+1}, \\ s = \dfrac{d^2 f}{dx\,dy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \sum_i \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial \alpha_i}\alpha_{i+1} + \sum_k \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \beta_k}\beta_{k+1} + \sum_{i,k} \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i\,\partial \beta_k}\alpha_{i+1}\beta_{k+1}. \end{cases}$$

Si l'on substitue dans l'équation (2) et si l'on a égard aux deux dérivées α_{m+1}, β_{n+1} qui ne figurent pas dans (1), on voit que l'équation (2) doit être de la forme

$$(4)\qquad s + \rho pq + ap + bq + c = 0,$$

ρ, a, b, c désignant des fonctions de x, y, z.

Si l'on prend comme nouvelle inconnue, au lieu de z, une fonction θ de x, y, z, assujettie uniquement à vérifier la relation

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = e^{\int \rho\, dz},$$

l'équation définissant θ sera encore de la forme (4), mais ne contiendra pas de terme en pq; elle admettra une solution de la même forme que l'équation (4) et réciproquement.

Il nous suffit donc, pour avoir la solution de la question posée, de déterminer trois fonctions a, b, c de x, y, z telles que l'équation

$$(5)\qquad s + ap + bq + c = 0$$

admette une solution de la forme (1).

3. Substituons les valeurs (3) de p, q, s et annulons les coefficients de α_{m+1}, β_{n+1}, $\alpha_{m+1}\beta_{n+1}$; nous obtenons les trois relations

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m\,\partial \beta_n} = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial \alpha_m} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m\,\partial \beta_1}\beta_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m\,\partial \beta_{n-1}}\beta_n + a\frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = 0,$$

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \beta_n} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n\,\partial \alpha_1}\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n\,\partial \alpha_{m-1}}\alpha_m + b\frac{\partial f}{\partial \beta_n} = 0,$$

dont la première doit être identique et dont les deux dernières doivent être vérifiées lorsque l'on a remplacé z par f dans a et b.

La relation (6) exprime que $\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$ ne renferme pas β_n et que $\frac{\partial f}{\partial \beta_n}$ ne renferme pas α_m; les relations (7) et (8) nous prouvent donc que, lorsque l'on a remplacé z par f, a dépend linéairement de β_n et b linéairement de α_m; nous sommes ainsi conduits à différentier ces relations respectivement par rapport à β_n et à α_m.

Différentions (7) une première fois par rapport à β_n; il vient, en se rappelant que $\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$ ne renferme pas β_n

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \, \partial \beta_{n-1}} + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \beta_n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = 0. \tag{9}$$

Différentions de nouveau par rapport à β_n; $\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$ n'étant pas nul, il vient

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_n}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n^2} = 0. \tag{10}$$

Cette dernière relation est identique, si a ne dépend pas de z; ce cas à examiner étant supposé écarté, l'expression

$$\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} : \frac{\partial a}{\partial z}$$

doit, après la substitution de z, être égale à

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \beta_n^2}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \beta_n}\right)^2}$$

et, par suite, ne pas dépendre de α_m; elle doit donc être indépendante de z, et l'on a alors deux cas à distinguer suivant que sa valeur est nulle ou non.

D'ailleurs, ce que nous avons dit pour a se répète pour b; il suffit de prendre la relation (8) pour point de départ au lieu de la relation (7); on obtiendra, en différentiant par rapport à α_m, les relations

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n \, \partial \alpha_{m-1}} + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} \frac{\partial f}{\partial \beta_n} = 0, \\ &\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m^2} = 0, \end{aligned}$$

d'où résultent pour b des conclusions analogues à celles obtenues pour a.

Les deux fonctions a et b ne peuvent donc être que de l'une des

trois formes suivantes :

$$\text{(I)} \qquad m e^{\omega z} + n,$$

$$\text{(II)} \qquad m z + n,$$

$$\text{(III)} \qquad m,$$

ω, m, n désignant des fonctions des seules variables x et y.

Il reste ainsi, pour avoir toutes les solutions de la question, à associer ces trois formes deux à deux et à examiner les différents cas qui peuvent se présenter.

4. Supposons que a soit de la forme (I); nous allons établir que b ne peut être que de l'une des formes (I) et (III).

Soit, en effet,

$$a = m e^{\omega z} + n.$$

La relation (10) s'écrit

$$\omega \left(\frac{\partial f}{\partial \beta_n} \right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n^2} = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_n} = \frac{1}{\omega(\beta_n + f_2)}, \tag{12}$$

f_2 désignant une fonction qui, d'après la relation (6), ne dépend pas de α_m et qui ne peut, par conséquent, renfermer que $x, y, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$.

Substituons la valeur (12) de $\frac{\partial f}{\partial \beta_n}$ dans la relation (8); il vient

$$\left(b - \frac{\partial \log \omega}{\partial x} \right)(\beta_n + f_2) = \frac{df_2}{dx}. \tag{13}$$

Or, la relation (12) exprimant que

$$\frac{e^{\omega f}}{\beta_n + f_2}$$

ne dépend pas de β_n, il résulte de (13) que l'expression

$$\left(b - \frac{\partial \log \omega}{\partial x} \right) e^{\omega z},$$

lorsqu'on y a remplacé z par f, ne dépend pas de β_n; cette expression est donc une simple fonction de x et y et nous avons deux cas à distinguer suivant qu'elle n'est pas nulle ou suivant qu'elle est nulle; b ne

peut donc être, comme nous l'avions annoncé, que de la forme (I) ou de la forme (III).

5. Supposons d'abord que b soit de la forme (I); il résulte de ce qui précède que l'on aura

$$b = m_1 e^{-\omega z} + n_1,$$

où

$$n_1 = \frac{\partial \log \omega}{\partial x}.$$

Nous pourrons y adjoindre

$$n = \frac{\partial \log \omega}{\partial y};$$

car on peut répéter sur b le raisonnement fait précédemment sur a; la relation (11) conduit à la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = -\frac{1}{\omega(\alpha_m + f_1)}$$

analogue à (12) et dans laquelle f_1 ne renferme ni α_m, ni β_n; la relation (7) devient alors

$$\left(a - \frac{\partial \log \omega}{\partial y}\right)(\alpha_m + f_1) = \frac{df_1}{dy}, \tag{14}$$

d'où résulte que

$$\left(a - \frac{\partial \log \omega}{\partial y}\right) e^{-\omega z}$$

ne dépend pas de z.

L'équation (5) est ainsi, dans le cas actuel, de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \left(m e^{\omega z} + \frac{\partial \log \omega}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(m_1 e^{-\omega z} + \frac{\partial \log \omega}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

m, m_1, ω désignant des fonctions de x et y et c une fonction de x, y, z.

Si l'on prend comme nouvelle inconnue ωz, on a une équation du type suivant

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(A e^{z}) + \frac{\partial}{\partial y}(B e^{-z}) + C = 0, \tag{15}$$

où A et B sont des fonctions de x et y et où C est une fonction de x, y, z.

Cette équation doit admettre une solution de la forme

$$(16)\qquad z = \log\frac{\mu_1}{\lambda_1} + f_3,$$

en posant

$$(17)\qquad \lambda_1 = \alpha_m + f_1, \qquad \mu_1 = \beta_n + f_2,$$

et en désignant par f_1, f_2, f_3 des fonctions de x, y, α_1, ..., α_{m-1}, β_1, ..., β_{n-1}.

Les relations (13) et (14) deviennent d'ailleurs

$$(18)\qquad \frac{d\log\mu_1}{dx} = -\mathrm{B}e^{-z},$$

$$(19)\qquad \frac{d\log\lambda_1}{dy} = -\mathrm{A}e^{z},$$

d'où résulte que, si l'on différentie la formule (16), il vient

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} - \frac{d(\mathrm{A}e^{z})}{dx} + \frac{d(\mathrm{B}e^{-z})}{dy} = \frac{d^2 f_3}{dx\,dy}.$$

La condition pour que la valeur (16) de z satisfasse à l'équation (15) est donc que l'on ait

$$(20)\qquad \mathrm{C} = -\frac{d^2 f_3}{dx\,dy},$$

après la substitution de z dans C.

Le second membre de (20) ne peut être que de la forme bilinéaire par rapport à α_m, β_n; la fonction C est donc indépendante de z, puisque, dans le cas contraire, le premier membre de (20), après substitution de z, dépendrait de α_m et β_n en tant que fonction du rapport

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\beta_n + f_2}{\alpha_m + f_1}.$$

C étant une simple fonction de x et y, il en résulte que f_3 est une fonction déterminée de x et y, ne dépendant ni des fonctions α_1, β_1, ni de leurs dérivées. Prenons comme nouvelle inconnue $z - f_3$, on est amené à chercher si une équation de la forme

$$(21)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{A}e^{z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{B}e^{-z}) = 0$$

peut admettre comme solution l'expression

$$(22)\qquad z = \log\frac{\mu_1}{\lambda_1},$$

λ_1 et μ_1 ayant la signification donnée par les formules (17).

En tenant compte de la valeur (22) de z, les relations (18) et (19) donnent

$$\frac{d\mu_1}{dx} = -B\lambda_1, \qquad \frac{d\lambda_1}{dy} = -A\mu_1.$$

Si l'on a égard à tout ce qui précède, on peut donc dire que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (21) réponde à la question posée est que l'on puisse vérifier le système suivant, déterminant deux fonctions λ et μ

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = -B\lambda, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = -A\mu, \tag{23}$$

au moyen de deux expressions ne renfermant, outre les variables x et y, que deux fonctions arbitraires de x et y respectivement et leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé.

6. L'élimination de l'une des fonctions λ ou μ entre les équations (23) conduit pour l'autre à une équation linéaire du second ordre de la forme considérée par Laplace; si l'on élimine μ, on trouve que λ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \log A}{\partial x}\frac{\partial\lambda}{\partial y} - AB\lambda = 0, \tag{24}$$

et si l'on élimine λ, on obtient l'équation

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \log B}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x} - AB\mu = 0, \tag{25}$$

à laquelle satisfait μ.

On peut donc considérer l'un des résultats de M. Moutard comme complètement établi.

Il y a peut-être cependant encore intérêt à indiquer comment on peut relier directement les équations (24) et (25) à l'équation (21); remarquons que cette dernière peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - Ae^{z}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}(Be^{-z}),$$

et l'on est conduit à considérer le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} - Ae^{z} &= \frac{\partial \log\mu}{\partial y}, \\ Be^{-z} &= -\frac{\partial \log\mu}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

définissant deux fonctions inconnues z et μ; si l'on élimine μ, on retrouve l'équation (21); si, au contraire, on élimine z, on trouve l'équation (25).

La considération du système (26) permet de démontrer de nouveau que, non seulement les problèmes de l'intégration des équations (21) et (25) sont équivalents, mais que si l'une de ces équations a une solution de la forme que nous considérons, il en est de même de l'autre. Cela résulte immédiatement de ce que les relations (18), (19), (22) entraînent les suivantes :

$$\frac{dz}{dy} - \mathrm{A}e^{z} = \frac{d\log\mu_1}{dy},$$

$$\mathrm{B}e^{-z} = -\frac{d\log\mu_1}{dx}.$$

En considérant de même le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{B}e^{-z} = -\frac{\partial\log\lambda}{\partial x}, \qquad \mathrm{A}e^{z} = -\frac{\partial\log\lambda}{\partial y},$$

on relierait entre elles les équations (21) et (24).

7. Reportons-nous à la fin du n° 4 et supposant toujours

$$a = me^{\omega z} + n,$$

examinons la seconde hypothèse possible relativement à b, savoir celle où, b étant de la forme (III), on a

$$b = \frac{\partial\log\omega}{\partial x}.$$

L'équation (5) est alors

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (me^{\omega z} + n)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial\log\omega}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + c = 0.$$

Si l'on prend comme nouvelle inconnue $\omega z + \log m$, on a une équation transformée de la forme

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (e^{z} + \mathrm{A})\frac{\partial z}{\partial x} + \mathrm{C} = 0,$$

où A ne dépend que de x et y et où C est une fonction de x, y, z.

Cherchons à vérifier cette équation par une expression de la

forme (1); les relations (12) et (13) nous donnent ici

$$\frac{\partial f}{\partial \beta_n} = \frac{1}{\beta_n + f_2},$$
$$\frac{df_2}{dx} = 0,$$

en sorte que f_2 ne peut dépendre que de y, β_1, β_2, ..., β_{n-1}.

On a alors

(28) $$f = \log(\beta_n + f_2) + f_1,$$

f_1 étant de même forme que f, mais ne dépendant pas de β_n.

La relation (7) devient

(29) $$\frac{d \log \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_m}}{dy} + (\beta_n + f_2) e^{f_1} + A = 0.$$

Portons notre attention sur la dérivée β_n mise en évidence dans la formule (28); nous obtenons la relation

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha_m \, \partial \beta_{n-1}} + e^{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_m} = 0,$$

dont l'intégration est immédiate et nous donne

(30) $$e^{f_1} = \frac{\frac{\partial f_4}{\partial \beta_{n-1}}}{f_3 + f_4};$$

f_3 et f_4 désignant des expressions de même forme que f qui sont respectivement indépendantes de β_{n-1} et de α_m.

Envisageons maintenant la dérivée β_{n-1}; afin de la mettre en évidence, sous une forme simple, éliminons f_2 entre l'identité (29) et celle qu'on en déduit en différentiant par rapport à α_m; il vient, en tenant compte de (30),

(31) $$\frac{\partial}{\partial \alpha_m} \frac{d \log \frac{\partial f_3}{\partial \alpha_m}}{dy} = - A \frac{\frac{\partial f_3}{\partial \alpha_m}}{f_3 + f_4}.$$

Le premier membre de cette nouvelle identité ne peut être que linéaire par rapport à β_{n-1}; il en est donc de même du second; si A n'était pas nul, $\frac{1}{f_3 + f_4}$ devrait être linéaire par rapport à β_{n-1}, ce qui est impossible si l'on remarque que f_3 renferme essentiellement α_m et que f_4 renferme aussi essentiellement β_{n-1}.

La conclusion est donc que l'on a

$$A = 0. \tag{32}$$

Démontrons maintenant que C est une simple fonction de x et y; rien ne serait plus facile que d'établir ce résultat en partant de l'identité (31); mais il est plus instructif de procéder de la façon suivante.

Substituons à z dans l'équation (27) la fonction f définie par la formule (28); en ayant égard à la dérivée β_n, on voit immédiatement que C est de la forme

$$C = me^z + n,$$

m et n étant deux fonctions de x et y.

Tenant compte du résultat $A = 0$, l'équation (27) peut donc s'écrire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial e^z}{\partial x} + me^z + n = 0. \tag{33}$$

Or, considérons le système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x} + m = e^{-u}, \\ &e^z = \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial m}{\partial y} - n\right) e^u. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

Si l'on élimine u, on trouve l'équation (33); si, au contraire, on élimine z, on trouve l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(ke^u) + (m - e^{-u}) \frac{\partial u}{\partial y} - mke^u + k = 0, \tag{35}$$

où l'on a posé, pour abréger;

$$k = n - \frac{\partial m}{\partial y}.$$

Les formules (34), qui effectuent le passage de l'équation (33) à l'équation (35), nous montrent que si l'une de ces équations admet une solution de la forme considérée (1), il en est de même de l'autre.

Or, si la fonction k n'est pas nulle, l'équation (35) rentre dans le type (5) pour lequel les coefficients a et b sont tous deux de la forme (I); en appliquant les résultats que nous avons obtenus dans les numéros précédents, on aura

$$m = 0.$$

Si, au contraire, la fonction k est nulle, l'équation (35) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + (m - e^{-u}) \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

elle rentre alors, après échange des lettres x et y, dans le type que nous étudions actuellement, et, d'après la condition (32) trouvée pour l'équation (27), nous obtenons encore

$$m = 0.$$

L'équation (33) est donc, dans tous les cas, de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial e^z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} = 0, \tag{36}$$

θ désignant une fonction de x et y.

Le système (34) devient le suivant

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u}, \qquad e^z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} e^u,$$

en vertu duquel z satisfait à l'équation (36) et u à la suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} e^u\right) + \frac{\partial e^{-u}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{37}$$

Si la fonction $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}$ est nulle, l'équation (36) devient la suivante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial e^z}{\partial x} = 0,$$

qui satisfait à la question et que nous avons, en somme, déjà intégrée pour écrire la formule (30).

Si la fonction $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}$ n'est pas nulle, il nous suffit de remarquer que tout revient à considérer l'équation (37) et l'on est ramené à la question traitée dans les numéros précédents.

On peut encore remarquer que si l'on prend comme nouvelle inconnue $z + \theta$, l'équation (36) se ramène à la suivante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{A} e^z) = 0, \tag{38}$$

où A désigne une fonction de x et y et qui se déduit de l'équation (21) en y faisant $\mathrm{B} = 0$.

Rien n'est d'ailleurs plus facile que d'étudier directement l'équation (38); car on l'intègre, dans le cas le plus général, par la formule

$$e^z = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X} - \int \mathrm{AY}\, dy},$$

où X désigne une fonction arbitraire de x et Y une fonction arbitraire de y.

8. Passons maintenant au cas où l'expression de a,

$$a = mz + n,$$

est de la forme (II); il résulte de ce que nous avons dit au n° 4, après échange des lettres x et y, que b ne peut pas être de la forme (I); je dis, de plus, que b ne peut être que de la forme (III); en effet, la relation (10) nous donne alors, m n'étant pas nul,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n^2} = 0; \tag{39}$$

il en résulte que, si l'on différentie la relation (8) par rapport à β_n, on doit avoir, lorsqu'on a remplacé z par f,

$$\frac{\partial b}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta_n}\right)^2 = 0;$$

b ne contient donc pas z et l'équation (5) est, dans le cas actuel, de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + (mz + n)\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

m, n, b étant des fonctions de x et y seulement.

Mais, si l'on prend comme nouvelle inconnue une expression linéaire par rapport à z, la forme de l'équation précédente ne change pas, et il est facile de voir qu'on peut toujours faire en sorte que, pour la nouvelle équation, les termes analogues à n et à b soient nuls; nous pouvons donc nous borner à chercher quelles sont les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + mz\frac{\partial z}{\partial x} + c = 0, \tag{40}$$

où m est une fonction de x, y et c une fonction de x, y, z, qui admettent comme solution une expression de la forme (1).

On voit immédiatement que c doit être linéaire par rapport à z; en effet, la relation (8), eu égard à (6), s'écrit dans le cas actuel

$$\frac{\partial \frac{df}{dx}}{\partial \beta_n} = 0.$$

Donc $\frac{df}{dx}$ ne contient pas β_n et, par suite, $\frac{d^2 f}{dx\,dy}$ ne peut le contenir que linéairement; mais de (39) résulte que f est aussi linéaire par rapport à β_n; si donc l'équation (40) est vérifiée, lorsqu'on remplace z par f, la fonction c doit être linéaire par rapport à z.

L'équation (40) s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + mz\frac{\partial z}{\partial x} + \omega z + \omega_1 = 0, \tag{41}$$

ω et ω_1 étant des fonctions de x et y seulement.

On pourrait établir bien facilement, en partant de (7) et en différentiant par rapport à α_m, que la fonction m ne dépend pas de x; mais il est plus élégant d'étendre au cas actuel un raisonnement qui nous a été indiqué par M. Darboux et qui donne des résultats plus complets.

Considérons le système

$$v = \frac{\partial z}{\partial y} + m\frac{z^2}{2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial x}\frac{z^2}{2} + \omega z + \omega_1 = 0,$$

déterminant deux fonctions v et z de x et y; l'élimination de v conduit à l'équation (41); si l'une des fonctions $\frac{\partial m}{\partial x}$, ω n'est pas nulle, l'élimination de z conduit à une équation du second ordre en v qui doit admettre une solution de la même forme générale que celle dont on suppose l'existence pour l'équation en z.

Or, toute équation du second ordre intégrable dans ces conditions est, ainsi qu'on l'a vu, de la forme (4), où ρ, a, b, c sont des fonctions de x, y, z; l'équation en v ne remplissant pas cette condition essentielle, la contradiction à laquelle nous parvenons entraîne

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 0, \qquad \omega = 0.$$

La fonction m ne dépendant que de y, on peut alors, en prenant, à la place de y, une nouvelle variable indépendante qui soit une fonction convenablement choisie de y, faire en sorte que m soit, dans la nouvelle équation, égale à 1 et l'on peut, par suite, se borner à considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial x} + \theta = 0, \tag{42}$$

où θ désigne une fonction de x et de y seulement.

Or, considérons le système suivant :

$$(43)\qquad \begin{cases} u = \log \dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ z = -\dfrac{\partial u}{\partial y} - \theta\, e^{-u}, \end{cases}$$

déterminant deux fonctions z et u de x et y; l'élimination de u conduit pour z à l'équation (42) et l'élimination de z à la suivante :

$$(44)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\theta\, e^{-u}) + e^u = 0.$$

Les formules (43) qui établissent le passage de l'équation (42) à l'équation (44) étant résolues respectivement par rapport à u et à z, il en résulte que, si l'une des deux équations (42) et (44) admet une solution de la forme considérée (1), il en est de même de l'autre.

Mais si la fonction θ n'était pas nulle, l'équation (44) serait du type (5), où a serait de la forme (I) et b de la forme (III); le terme e^u qui y figure conduit alors à une contradiction avec les développements du numéro précédent.

En définitive, l'équation cherchée (42) se réduit ainsi simplement à la suivante

$$(45)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

qui s'intègre immédiatement et dont l'intégrale générale est déterminée par la formule

$$(46)\qquad z = -\frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} + \frac{2\varphi'(y)}{f(x) + \varphi(y)},$$

où $f(x)$ désigne une fonction arbitraire de x et $\varphi(y)$ une fonction arbitraire de y admettant $\varphi'(y)$ et $\varphi''(y)$ pour dérivées.

9. Il nous reste enfin à supposer dans (5) que a est de la forme (III); les cas où b serait de la forme (I) ou de la forme (II) se déduisent de ceux examinés précédemment par l'échange de x et y; la seule hypothèse qu'il nous reste à considérer est donc celle où a et b, rentrant tous deux dans la forme (III), sont de simples fonctions de x et de y.

Dans ces conditions, les relations déjà établies

$$\frac{d \log \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m}}{dy} + a = 0, \qquad \frac{d \log \dfrac{\partial f}{\partial \beta_n}}{dx} + b = 0$$

donnent par l'intégration

$$\begin{aligned} f = {} & u_1 f_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \\ & + u_2 f_2(y, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) + f_3(x, y, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}), \end{aligned}$$

en désignant par u_1 et u_2 deux fonctions de x et y assujetties simplement à vérifier les équations

$$\frac{\partial \log u_1}{\partial y} + a = 0, \qquad \frac{\partial \log u_2}{\partial x} + b = 0.$$

Écrivons que l'équation (5) est vérifiée lorsqu'on y remplace z par l'expression f précédente; il vient

$$\begin{aligned} - u_1 f_1 \frac{\partial a}{\partial x} - u_2 f_2 \frac{\partial b}{\partial y} - ab(u_1 f_1 + u_2 f_2) & \\ + \frac{d^2 f_3}{dx\,dy} + a\frac{df_3}{dx} + b\frac{df_3}{dy} + c = 0. & \end{aligned}$$

Différentions cette relation deux fois successivement par rapport à α_m et à β_n; nous obtenons, en n'écrivant que les relations qui vont nous être utiles, et en remarquant que les fonctions u_1 et u_2 ne sont pas nulles,

$$\left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial x} - ab\right)\frac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha_m^2} + u_1 \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_m}\right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial y} - ab\right)\frac{\partial^2 f_2}{\partial \beta_n^2} + u_2 \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \beta_n}\right)^2 = 0.$$

Écartons immédiatement le cas où l'équation proposée serait linéaire, c'est-à-dire où c dépendrait linéairement de z.

Ce cas particulier étant laissé de côté, les rapports

$$(47) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial c}{\partial z} - ab - \dfrac{\partial a}{\partial x}}, \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial c}{\partial z} - ab - \dfrac{\partial b}{\partial y}},$$

égaux respectivement aux suivants

$$(48) \qquad -\frac{1}{u_1}\,\frac{\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial \alpha_m^2}}{\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_m}\right)^2}, \qquad -\frac{1}{u_2}\,\frac{\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial \beta_n^2}}{\left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \beta_n}\right)^2},$$

ne doivent pas dépendre de z, puisque les rapports (48) sont respectivement indépendants de β_n et de α_m.

Ces deux rapports (47) doivent d'ailleurs être égaux; sinon, en

considérant leur quotient, on aurait cette conclusion que $\frac{\partial c}{\partial z}$ est une simple fonction de x et y; on a donc

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$$

et, en introduisant une fonction auxiliaire θ,

$$a = \frac{\partial \log \theta}{\partial y}, \qquad b = \frac{\partial \log \theta}{\partial x}.$$

L'équation proposée s'écrit

$$\theta \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + c\theta = 0,$$

et, en prenant comme nouvelle inconnue $z\theta$, on voit que l'on peut se borner au cas où, pour l'équation (5), on a

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

c'est-à-dire où cette équation est la suivante,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + c = 0, \tag{49}$$

c étant une fonction de x, y, z.

Les deux rapports égaux (48) étant, maintenant, l'un une fonction de x, l'autre une fonction de y, ont une même valeur constante qui est aussi celle des rapports (47); et, en définitive, la fonction c de notre équation (49) doit vérifier la relation

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = k \frac{\partial c}{\partial z},$$

où k est une constante qui n'est pas nulle; on en déduit, en intégrant,

$$kc = e^{k(z+m)} + n,$$

m et n désignant deux fonctions de x et y.

Si l'on prend comme inconnue $u = k(z+m)$, l'équation (49) devient la suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + e^u - \omega = 0, \tag{50}$$

où ω est une fonction déterminée de x et y.

Je dis que cette fonction ω doit être nulle.

La démonstration de ce point est une conséquence immédiate du résultat obtenu au n° 8 pour l'équation (41); la considération du système

$$(51)\qquad \begin{cases} u = \log\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \omega\right), \\ z = -\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

en vertu duquel z satisfait à l'équation

$$(52)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial x} + \omega z + \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

et u à l'équation (50), nous montre, en effet, que ces deux équations (50) et (52) admettent, en même temps, des solutions de la forme générale (1).

L'équation cherchée de la forme (50) ne peut donc être que la suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + e^u = 0,$$

dont Liouville a donné l'intégrale.

L'intégration de cette équation est ramenée, au moyen du système (51), où l'on suppose $\omega = 0$, à celle de l'équation (45), et son intégrale générale est ainsi, en vertu de (46), déterminée par la formule

$$e^u = -\frac{2f'(x)\,\varphi'(y)}{[f(x)+\varphi(y)]^2},$$

qui concorde avec celle donnée [III, p. 291].

NOTES DE L'AUTEUR.

NOTE IV.

SUR LA TORSION DES COURBES GAUCHES ET SUR LES COURBES A TORSION CONSTANTE.

1. Il semble au premier abord qu'il y ait une grande analogie de nature entre la courbure et la torsion d'une courbe gauche. L'une et l'autre de ces grandeurs se définissent comme le quotient d'un angle infiniment petit par la différentielle de l'arc; l'une et l'autre représentent une rotation dans la théorie cinématique des courbes à double courbure. Mais ces rapprochements sont les seuls qu'on puisse signaler : il y a un centre de courbure, il n'existe pas de centre de torsion; la courbure dépend des éléments différentiels du deuxième ordre; la torsion de ceux du troisième ordre. Enfin, tandis que la courbure est une irrationnelle dépendant d'un radical carré, comme toutes les grandeurs dont la mesure se ramène à celle d'un segment de droite, la torsion est déterminée rationnellement, *en grandeur et en signe,* pour chaque point d'une courbe gauche. Les formules qui donnent les valeurs de ces deux éléments mettent ce dernier point en pleine évidence (1). On peut encore l'établir en étudiant un infiniment petit d'une nature particulière, relatif à une courbe gauche quelconque.

2. Soit M un point quelconque d'une courbe gauche. Prenons sur la

(1) Dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* M. Hermite suppose que les coordonnées x, y, z du point d'une courbe gauche sont exprimées d'une

courbe quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, infiniment voisins du point M; et proposons-nous d'évaluer le volume du tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point M, que nous supposerons exprimées en fonction d'un paramètre t; soient x', y', z'; x'', x''', ... leurs dérivées par rapport à t. Si $t + h_i$ désigne la valeur du paramètre pour le point M_i, les coordonnées x_i, y_i, z_i de ce point s'exprimeront par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x_i = x + x' h_i + \dfrac{x''}{2} h_i^2 + \dfrac{x'''}{6} h_i^3 + \dots, \\ y_i = y + y' h_i + \dfrac{y''}{2} h_i^2 + \dfrac{y'''}{6} h_i^3 + \dots, \\ z_i = z + z' h_i + \dfrac{z''}{2} h_i^2 + \dfrac{z'''}{6} h_i^3 + \dots \end{cases}$$

Le volume V du tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$, c'est-à-dire le sixième du moment des deux segments $M_1 M_2$ et $M_3 M_4$ [1], sera défini, *en grandeur et en signe*, par la formule

$$(2)\qquad 6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

En négligeant les termes contenant la quatrième puissance et les

---

manière quelconque en fonction d'un paramètre t et il donne (p. 168 et suiv.) les expressions suivantes de la courbure et de la torsion.

Soient x', y', z', x'', ... les dérivées successives de x, y, z. Posons

$$\begin{aligned} A &= y'z'' - z'y'', \\ B &= z'x'' - x'z'', \\ C &= x'y'' - y'x''. \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Si ρ et τ désignent respectivement les inverses de la courbure et de la torsion, on aura les formules

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}, \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\Delta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

qui montrent bien la différence de nature entre la courbure et la torsion.

[1] *Voir*, à ce sujet, G. Kœnigs, *Leçons de Cinématique professées à la Faculté des Sciences de Paris*, Chapitre I.

puissances supérieures des h_i, on aura évidemment

$$6V = \begin{vmatrix} x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \frac{h_1}{1} & \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_1^3}{6} \\ 1 & \frac{h_2}{1} & \frac{h_2^2}{2} & \frac{h_2^3}{6} \\ 1 & \frac{h_3}{1} & \frac{h_3^2}{2} & \frac{h_3^3}{6} \\ 1 & \frac{h_4}{1} & \frac{h_4^2}{2} & \frac{h_4^3}{6} \end{vmatrix}$$

ou encore

$$(3) \qquad 72V = -\Delta\zeta(h_1, h_2, h_3, h_4),$$

Δ désignant le déterminant

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

et $\zeta(h_1, h_2, h_3, h_4)$ le produit suivant :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\zeta(h_1, h_2, h_3, h_4) \\ &\quad = (h_4 - h_1)(h_4 - h_2)(h_4 - h_3)(h_3 - h_1)(h_3 - h_2)(h_2 - h_1). \end{aligned} \right.$$

3. Pour calculer le déterminant Δ, on peut se servir des formules de Serret-Frenet :

$$(6) \qquad \frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{da}{ds} = \frac{b}{\rho}, \qquad \frac{db}{ds} = -\frac{a}{\rho} - \frac{c}{\tau},$$

a, b, c ayant les significations déjà données [I, p. 2 et 9]. On en déduit en effet les expressions suivantes des dérivées de x par rapport à t,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = a\frac{ds}{dt}, \\ x'' &= \qquad a\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{b}{\rho}\frac{ds^2}{dt^2}, \\ x''' &= \qquad a\frac{d^3 s}{dt^3} + 3\frac{b}{\rho}\frac{ds}{dt}\frac{d^2 s}{dt^2} + b\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{ds}\frac{ds^3}{dt^3} - \left(\frac{a}{\rho^2} + \frac{c}{\rho\tau}\right)\frac{ds^3}{dt^3}. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions, et celles qui conviennent de même aux dérivées de y et de z, permettent de calculer aisément la différentielle de l'arc, la courbure et la torsion. En les portant, par exemple, dans le déterminant Δ et se rappelant que le déterminant des 9 cosinus a, b, c doit

être égal à 1, on trouvera

$$(8) \qquad \Delta = -\frac{1}{\rho^2\tau}\left(\frac{ds}{dt}\right)^6.$$

Cette formule met bien en évidence la propriété de la torsion sur laquelle nous voulions insister (¹).

4. En portant la valeur de Δ dans la formule (3), on aura donc

$$(9) \qquad 72\,V = \frac{1}{\tau\rho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^6 \zeta(h_1, h_2, h_3, h_4).$$

Pour donner une forme entièrement géométrique à cette formule, on peut procéder comme il suit :

En négligeant les infiniment petits du second ordre, on peut considérer le point M_i comme porté sur la tangente en M à une distance de M égale, en grandeur et en signe, au produit $\frac{ds}{dt}h_i$, de sorte que la différence

$$\frac{ds}{dt}(h_k - h_i)$$

représentera, *en grandeur et en signe*, le segment M_iM_k. En tenant compte de cette remarque, on pourra écrire la relation

$$(10) \qquad 72\,V = \frac{1}{\tau\rho^2}\overline{M_1M_4}\;\overline{M_2M_4}\;\overline{M_3M_4}\;\overline{M_1M_3}\;\overline{M_2M_3}\;\overline{M_1M_2},$$

qui résout complètement le problème proposé. Elle est tout à fait analogue à la suivante

$$(11) \qquad 4\,S = \frac{1}{\rho}\overline{M_1M_3}\;\overline{M_2M_3}\;\overline{M_1M_2},$$

qui donne, sur une courbe plane ou gauche, l'aire du triangle formé par les trois points infiniment voisins M_1, M_2, M_3. Cette nouvelle formule devient d'ailleurs pleinement évidente si l'on se rappelle une des relations les plus connues de la Géométrie élémentaire.

5. Si l'on suppose que quelques-uns des points M_1, M_2, M_3, M_4 viennent se confondre, la formule (10) conduit à des relations déjà connues. Nous savons, par exemple, que le volume V admet l'expres-

(¹) Elle se déduit immédiatement des deux formules de M. Hermite données dans la note de la page 423, mais avec un changement dans les signes, sur lequel nous allons revenir plus loin.

sion suivante :

$$V = \frac{1}{6}\,\overline{M_1M_2}\;\overline{M_3M_4}\;\delta\sin\theta,$$

θ désignant l'angle des arêtes opposées M_1M_2 et M_3M_4, δ étant leur plus courte distance. On aura donc

$$12\,\delta\sin\theta = \frac{1}{\tau\rho^2}\,\overline{M_1M_4}\;\overline{M_2M_4}\;\overline{M_1M_3}\;\overline{M_2M_3}.$$

Supposons que M_2 vienne coïncider avec M_1 et M_4 avec M_3; les arêtes M_1M_2 et M_3M_4 deviendront les tangentes en M_1 et en M_3; leur angle θ aura pour valeur approchée $\frac{M_1M_3}{\rho}$, et la formule précédente nous donnera

$$12\,\delta = \frac{\overline{M_1M_3}^3}{\rho\tau}.$$

C'est l'expression bien connue que M. O. Bonnet a donnée pour la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines.

Laissant de côté des remarques analogues qui nous feraient connaître d'autres infiniment petits, revenons à l'objet que nous avons en vue. La formule (8) montre, comme nous l'avons fait remarquer, que la torsion est une quantité rationnelle, puisqu'en chaque point de la courbe ρ^2 et $\frac{ds^6}{dt^6}$ s'expriment sans aucun radical carré. Au reste, on peut mettre en évidence le même résultat en rappelant les formules que nous avons données au n° 36 [I, p. 42]. Nous avons vu que si c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la binormale, on a, τ désignant toujours l'inverse de la torsion,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= a\,ds = \tau(c''dc' - c'dc''),\\ dy &= a'ds = \tau(c\,dc'' - c''dc),\\ dz &= a''ds = \tau(c'dc - c\,dc'). \end{aligned}\right.$$

Il est clair que les expressions ainsi obtenues ne dépendent nullement du sens attribué à la binormale; et, par suite, chacune d'elles fera connaître une valeur rationnelle de la torsion. Au reste, si l'on substitue à c, c', c'' des quantités h, k, l simplement proportionnelles à ces cosinus, on aura les formules

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= \tau\frac{l\,dk - k\,dl}{h^2+k^2+l^2},\\ dy &= \tau\frac{h\,dl - l\,dh}{h^2+k^2+l^2},\\ dz &= \tau\frac{k\,dh - h\,dk}{h^2+k^2+l^2}, \end{aligned}\right.$$

qui ont été déjà employées pour le cas où la torsion est constante [I, p. 43].

6. Les remarques précédentes montrent aussi que, pour énoncer d'une manière tout à fait correcte le théorème d'Enneper, il faut dire que les torsions des deux lignes asymptotiques qui passent en un même point d'une surface y sont égales *en valeur absolue* à l'inverse de $\sqrt{-RR'}$, R et R' étant les rayons de courbure principaux de la surface; mais les formules de M. Lelieuvre [IV, p. 24, 29], rapprochées des précédentes (12), montrent immédiatement que les torsions des deux lignes asymptotiques sont *égales et de signes contraires*. Sur une surface à courbures opposées, les deux familles de lignes asymptotiques sont nettement distinguées par la propriété suivante : pour les unes, la torsion est *positive;* pour les autres, la torsion est *négative*.

Il y a, par exemple, deux classes de surfaces réglées : pour les unes, la torsion des génératrices rectilignes est positive; pour les autres, elle est négative. Pour définir cette torsion, il faut, bien entendu, considérer le plan tangent à la surface comme étant le plan osculateur de la génératrice rectiligne.

Pour chercher à quelle propriété de forme correspond le signe de la torsion, appliquons, par exemple, les formules (12) à l'hélice définie par les équations

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = ht,$$

nous trouverons

$$\tau = -\frac{1+h^2}{h},$$

de sorte que, pour une hélice *dextrorsum,* la torsion est *négative;* elle est *positive,* au contraire, pour une hélice *sinistrorsum* [1].

7. Au n° 39 nous avons signalé, comme un problème des plus inté-

---

[1] On voit facilement que la valeur de la torsion donnée par la formule de M. Hermite et celle qui résulte de l'application des formules (6) de Serret-Frenet sont égales et de signes contraires. La formule de M. Hermite nous semble préférable : il aurait mieux valu écrire les formules de M. Serret sous la forme

$$da = \frac{b\,ds}{\rho}, \qquad dc = -\frac{b\,ds}{\tau}.$$

Alors, pour une hélice *dextrorsum,* la torsion serait *positive;* τ serait égale à la rotation p et non à cette rotation changée de signe (n° 4).

ressants, la recherche des courbes algébriques à torsion constante. La construction que nous avons donnée au n° 770 nous a montré qu'il y a le plus haut intérêt à connaître même *celles de ces courbes qui sont entièrement imaginaires*. Cette construction peut, en effet, s'énoncer de la manière abrégée suivante (n^{os} 769-770) :

Pour déterminer toutes les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution de paramètre 2τ, *on construit deux courbes* (Γ), (Γ_1) *ayant des torsions constantes, égales et de signes contraires* $\frac{i}{\tau}$, $\frac{-i}{\tau}$. *Le milieu* μ *de la corde, qui joint un point de* (Γ) *à un point de* (Γ_1), *décrit une surface* (S_0) *qui peut être engendrée, soit par la translation d'une courbe* (Γ') *homothétique à* (Γ), *soit par la translation d'une courbe* (Γ'_1) *homothétique à* (Γ_1). *Les plans osculateurs aux courbes* (Γ') *et* (Γ'_1) *qui passent en un point* M *de* (S_0) *se coupent suivant une droite* (d). *Les deux nappes focales* (S_1) *et* (S_2) *de la congruence engendrée par cette droite sont les surfaces cherchées. D'ailleurs, si* F_1, F_2 *sont les points focaux de* (d), *on a*

$$MF_1 = -MF_2 = \pm \frac{\tau i \sin\omega}{2},$$

ω *désignant l'angle des deux plans osculateurs qui se coupent suivant la droite* (d).

Il résulte immédiatement de cette construction la conséquence suivante : il faut que la courbe (Γ) soit imaginaire pour que les nappes (S_1) et (S_2) soient réelles. On devra alors associer à (Γ) la courbe imaginaire conjuguée (Γ_1).

Depuis l'invitation que nous avons adressée au n° 39 aux géomètres, les courbes à torsion constante ont été l'objet d'un certain nombre de travaux [1].

---

[1] G. Koenigs, *Sur la forme des courbes à torsion constante* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. I, p. E.1; 1887).

I. Lyon, *Sur les courbes à torsion constante;* Thèse soutenue en juillet 1890 devant la Faculté des Sciences de Paris (*Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble*, t. II, p. 353; 1890).

M. Fouché, *Sur les courbes algébriques à torsion constante* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VII, p. 335; novembre 1890).

E. Fabry, *Sur les courbes à torsion constante* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. IX, p. 177; 1892).

E. Cosserat, *Sur les courbes algébriques à torsion constante et sur les surfaces minima algébriques inscrites dans une sphère* (*Comptes rendus*, t. CXX, p. 1252; 1895).

Bien qu'on n'ait pas encore réussi à déterminer toutes les courbes algébriques à torsion constante, nous devons à M. Fabry la connaissance d'un certain nombre d'entre elles, qui sont réelles. On peut citer, par exemple, celles qui correspondent aux valeurs suivantes des cosinus directeurs de la binormale

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{\sqrt{\lambda}\cos\mu t - \sqrt{\mu}\cos\lambda t}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}}, \\ c' &= \frac{\sqrt{\lambda}\sin\mu t + \sqrt{\mu}\sin\lambda t}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}}, \\ c'' &= \frac{2\sqrt[4]{\lambda\mu}}{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}}\cos\frac{\lambda+\mu}{2}t, \end{aligned} \right.$$

où λ et μ sont deux entiers.

M. Fouché a employé pour étudier les courbes à torsion constante la méthode suivante :

Exprimons les cosinus directeurs de la binormale par les formules si souvent employées

$$(15) \qquad c = \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c' = i\,\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad c'' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},$$

où α et β sont les coordonnées symétriques d'un point de la sphère. Les équations (12) nous donneront

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx + i\,dy &= 2\tau i\,\frac{\beta^2\,d\alpha + \alpha^2\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \\ dx - i\,dy &= -2\tau i\,\frac{d\alpha + d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \\ dz &= -2\tau i\,\frac{\alpha\,d\beta + \beta\,d\alpha}{(\alpha-\beta)^2}. \end{aligned} \right.$$

Si la courbe est algébrique, c, c', c'' et, par suite, α, β seront nécessairement des fonctions algébriques d'un paramètre. Il en sera de même des intégrales

$$\int \frac{\beta^2\,d\alpha + \alpha^2\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \qquad \int \frac{d\alpha + d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \qquad \int \frac{\alpha\,d\beta + \beta\,d\alpha}{(\alpha-\beta)^2}.$$

D'autre part, comme les expressions

$$\frac{\beta^2\,d\alpha - \alpha^2\,d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \qquad \frac{d\alpha - d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \qquad \frac{\alpha\,d\beta - \beta\,d\alpha}{(\alpha-\beta)^2}$$

sont des différentielles exactes, on voit que les six expressions

$$\frac{d\alpha}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{\beta\, d\alpha}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{\beta^2\, d\alpha}{(\alpha-\beta)^2},$$
$$\frac{d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{\alpha\, d\beta}{(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{\alpha^2\, d\beta}{(\alpha-\beta)^2}$$

devront être des différentielles de fonctions algébriques. Réciproquement, il sera suffisant que trois d'entre elles, prises dans les trois colonnes différentes, admettent pour intégrales des fonctions algébriques.

Prenons, par exemple, celles qui sont dans la seconde ligne du Tableau précédent. Soit

$$\frac{d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = d\varepsilon, \tag{17}$$

il faudra que

$$d\varepsilon, \quad \alpha\, d\varepsilon, \quad \alpha^2\, d\varepsilon$$

soient des différentielles de fonctions algébriques. Cette condition exige évidemment que ε soit la dérivée seconde par rapport à α d'une fonction algébrique. Il faudra donc que l'on ait

$$d\varepsilon = \frac{d\beta}{(\alpha-\beta)^2} = d\left(\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}\right) = d\gamma''$$

ou encore

$$\beta' = \gamma'''(\alpha-\beta)^2. \tag{18}$$

Ainsi tout est ramené à la recherche de deux fonctions algébriques β et γ de α vérifiant cette équation.

On peut encore, avec M. Fouché, effectuer une dernière transformation. Posons

$$\alpha-\beta = \frac{1}{f}, \tag{19}$$

l'équation deviendra

$$f'+f^2 = \gamma'''. \tag{20}$$

Bien que cette équation n'ait pas été résolue d'une manière générale, on en aperçoit immédiatement un nombre illimité de solutions, que l'on obtient en prenant pour f des polynômes, des fractions rationnelles assujetties à des conditions simples. Il est vrai que les courbes correspondantes seront généralement imaginaires. Mais nous avons vu que, dans certaines questions au moins, ce sont ces courbes qu'il faudra rechercher.

8. L'équation précédente, comme celle que l'on obtiendrait en égalant à une constante l'expression de la torsion en coordonnées cartésiennes, appartient au type suivant.

Soient y, z, u, ... des fonctions d'une variable x assujetties à vérifier une équation différentielle de la forme suivante :

$$F(x, y, z, u, \ldots;\ y', z', u', \ldots;\ y'', z'', u'', \ldots) = 0,$$

y', y'', ...; z', ... désignant les dérivées successives de y, z, u, ... On peut se demander s'il est possible de résoudre une telle équation (ou plusieurs équations simultanées de même forme), c'est-à-dire d'exprimer x, y, z, u, ... en fonction d'un paramètre, de certaines fonctions arbitraires de ce paramètre et des dérivées de ces fonctions. Monge s'était proposé cette belle question dans le Mémoire que nous avons déjà cité [I, p. 16]. Elle mériterait d'être reprise avec tous les développements qu'elle comporte. On pourra consulter, sur le cas du premier ordre et de deux variables indépendantes, notre *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles* du premier ordre, inséré en 1883 au tome XXVII des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*.

NOTE V.

SUR LES FORMULES D'EULER ET SUR LE DÉPLACEMENT D'UN SOLIDE INVARIABLE.

1. Au Chapitre III du Livre I [p. 34] ainsi qu'au n° 963, nous avons eu à parler des formules célèbres d'Euler et d'Olinde Rodrigues qui définissent un changement de coordonnées ou un déplacement et contiennent seulement trois arbitraires, en fonction desquelles s'expriment algébriquement les neuf cosinus. Nous allons faire connaître une méthode géométrique qui donne ces formules de la manière la plus simple, en fournissant immédiatement la signification géométrique des arbitraires qui y figurent.

Considérons une figure mobile ayant un point fixe O et rapportons-la à un trièdre trirectangle $Oxyz$ ayant pour sommet le point O. Si on lui imprime un déplacement quelconque, on sait qu'il équivaut à une rotation d'angle θ autour d'un certain axe OH, passant par le point O (*fig.* 90). Par suite, un point M quelconque de la figure invariable venant occuper la nouvelle position M_1, il y aura un plan perpendiculaire à OH passant par M et par M_1, et dans ce plan, un cercle passant en M et en M_1, dont le centre P sera sur OH.

Menons les tangentes au cercle en M et en M_1; elles se coupent en un point Q. Nous allons déterminer de deux manières différentes les coordonnées du point Q.

L'angle MPM_1 étant égal à θ, l'angle MPQ sera égal à $\frac{\theta}{2}$. Par conséquent, si l'on imprimait à la figure mobile *dans sa première position* une rotation *infiniment petite,* dont la vitesse angulaire serait $\tang\frac{\theta}{2}$, la vitesse du point M serait, en grandeur et en signe, égale au segment MQ.

Si donc on désigne par x, y, z les coordonnées du point M et si

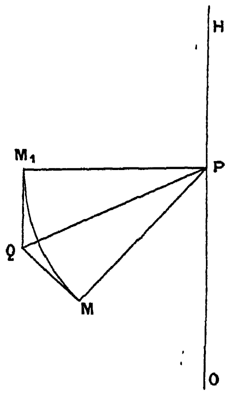
l'on pose, α, β, γ désignant les angles de OH avec les axes,

$$(1)\qquad \frac{\lambda}{\rho} = \cos\alpha \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\mu}{\rho} = \cos\beta \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\nu}{\rho} = \cos\gamma \operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

$\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$ seront les trois composantes de la rotation infiniment petite considérée, et les projections de MQ sur les trois axes seront

$$\frac{\mu z - \nu y}{\rho}, \qquad \frac{\nu x - \lambda z}{\rho}, \qquad \frac{\lambda y - \mu x}{\rho}.$$

Fig. 90.



Pour obtenir les coordonnées x', y', z' du point Q, il faudra ajouter les projections de OM à celles de MQ, ce qui donnera

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} \rho x' &= \rho x + \mu z - \nu y, \\ \rho y' &= \rho y + \nu x - \lambda z, \\ \rho z' &= \rho z + \lambda y - \mu x. \end{aligned} \right.$$

Envisageons maintenant la figure *dans sa seconde position;* on remarquera que M_1Q serait la vitesse du point M_1 si l'on imprimait à la figure une rotation *infiniment petite,* égale et contraire à la première. Si donc x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées du point M_1, on aura de même, en changeant les signes de λ, μ, ν ou celui de ρ,

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \rho x' &= \rho x_1 - \mu z_1 + \nu y_1, \\ \rho y' &= \rho y_1 - \nu x_1 + \lambda z_1, \\ \rho z' &= \rho z_1 - \lambda y_1 + \mu x_1. \end{aligned} \right.$$

Égalant les expressions différentes de x', y', z', nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho x + \mu z - \nu y = \rho x_1 - \mu z_1 + \nu y_1, \\ \rho y + \nu x - \lambda z = \rho y_1 - \nu x_1 + \lambda z_1, \\ \rho z + \lambda y - \mu x = \rho z_1 - \lambda y_1 + \mu x_1. \end{cases}$$

2. On peut résoudre ces équations d'une manière élégante. Si on les ajoute d'abord après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, on obtient la relation

$$(5)\qquad \lambda x + \mu y + \nu z = \lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1,$$

qui était évidente par la Géométrie, car elle exprime que la droite MM_1 est perpendiculaire à l'axe de rotation. Si l'on ajoute maintenant les quatre équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par des facteurs $\pm\lambda$, $\pm\mu$, $\pm\nu$, $\pm\rho$, tels que le coefficient de l'inconnue cherchée devienne égal à

$$(6)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = B,$$

on trouve

$$(7)\qquad \begin{cases} Bx = (\rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2)x_1 + 2(\lambda\mu+\nu\rho)y_1 + 2(\lambda\nu-\mu\rho)z_1 \\ By = 2(\lambda\mu-\nu\rho)x_1 + (\rho^2+\mu^2-\lambda^2-\nu^2)y_1 + 2(\mu\nu+\lambda\rho)z_1, \\ Bz = 2(\lambda\nu+\mu\rho)x_1 + 2(\mu\nu-\lambda\rho)y_1 + (\rho^2+\nu^2-\lambda^2-\mu^2)z_1. \end{cases}$$

Pour obtenir les formules résolues par rapport à x_1, y_1, z_1, il faudrait échanger x, y, z et x_1, y_1, z_1 en changeant le signe de ρ.

3. Dans les développements qui précèdent, nous envisageons une figure invariable, rapportée à un trièdre fixe (T) $Oxyz$ et se déplaçant pendant que ce trièdre reste fixe. On peut aussi considérer les formules précédentes comme définissant un changement de coordonnées, dans lequel on passera de (T) à un trièdre (T_1) $Ox_1y_1z_1$. Alors les arbitraires α, β, γ, θ, reliées à λ, μ, ν, ρ par les formules (1), définiront la rotation *qui amène le trièdre* (T_1) *à coïncider avec le trièdre* (T). Il suffit, pour le reconnaître, de remarquer que, si l'on suppose que la rotation définie par les formules (1) entraîne le trièdre (T), les coordonnées du point M_1, par rapport à la nouvelle position du trièdre, restent égales aux coordonnées x, y, z du point M, tandis que les coordonnées de M_1, relatives aux axes primitifs, sont x_1, y_1, z_1. Il est évident, d'ailleurs, que l'axe de rotation fait des angles égaux avec les axes de même nom des trièdres (T) et (T_1).

4. Revenons à notre premier point de vue. Au n° 27, nous avions déjà donné, sous deux formes différentes, les équations précédentes, en les rattachant à la considération de la substitution linéaire qui définit une rotation. Nous avons vu, en effet, que si l'on considère la sphère de rayon 1,

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

et si l'on introduit la variable complexe définie par la formule

$$\frac{x+iy}{1-z}=\alpha, \tag{8}$$

la substitution linéaire

$$\alpha=\frac{m\alpha_1+n}{p\alpha_1+q} \tag{9}$$

définit une rotation qui est aussi déterminée sous différentes formes par les équations (8), (9) et (11) [I, p. 34]. On retrouve ainsi les formules d'Euler; et si la méthode par laquelle on les obtient exige un appareil analytique plus compliqué que la précédente, elle permet du moins d'obtenir, avec plus de facilité, les relations relatives à *la composition de deux rotations.*

Supposons, en effet, que l'on effectue successivement deux rotations, la première définie par la formule (9), la seconde par la suivante :

$$\alpha_1=\frac{m_1\alpha_2+n_1}{p_1\alpha_2+q_1}. \tag{10}$$

En portant cette valeur de α_1 dans la formule précédente, on aura

$$\alpha=\frac{(mm_1+np_1)\alpha_2+mn_1+nq_1}{(pm_1+qp_1)\alpha_2+pn_1+qq_1}; \tag{11}$$

de sorte que, suivant la proposition de M. Klein, la composition de deux rotations équivaut à celle de deux substitutions linéaires. Si l'on désigne par m_{01}, n_{01}, p_{01}, q_{01} les valeurs de m, n, p, q relatives à la rotation composée, on aura

$$(12)\quad \begin{cases} m_{01}=mm_1+np_1, \\ n_{01}=mn_1+nq_1. \end{cases} \qquad (13)\quad \begin{cases} p_{01}=pm_1+qp_1, \\ q_{01}=pn_1+qq_1. \end{cases}$$

Si maintenant, pour établir une concordance avec nos premières formules, nous introduisons, comme au n° 27, les arbitraires λ, μ, ν, ρ, à la place de m, n, p, q, en posant [I, p. 34]

$$\begin{cases} m=-\rho+i\nu, & n=-\mu+i\lambda, & m_1=-\rho_1+i\nu_1, & n_1=-\mu_1+i\lambda_1, \\ q=-\rho-i\nu, & p=\mu+i\lambda, & q_1=-\rho_1-i\nu_1, & p_1=\mu_1+i\lambda_1. \end{cases} \tag{14}$$

et de même

$$(15)\qquad \begin{cases} m_{01} = -\rho_{01} + i\nu_{01}, & n_{01} = -\mu_{01} + i\lambda_{01}, \\ q_{01} = -\rho_{01} - i\nu_{01}, & p_{01} = \mu_{01} + i\lambda_{01}, \end{cases}$$

les formules (12) et (13) nous donneront les suivantes

$$(16)\qquad \begin{cases} \rho_{01} = \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 - \rho\rho_1, \\ \lambda_{01} = \mu\nu_1 - \nu\mu_1 - \lambda\rho_1 - \rho\lambda_1, \\ \mu_{01} = \nu\lambda_1 - \lambda\nu_1 - \mu\rho_1 - \rho\mu_1, \\ \nu_{01} = \lambda\mu_1 - \mu\lambda_1 - \nu\rho_1 - \rho\nu_1. \end{cases}$$

Elles résolvent complètement la question proposée, car elles donnent les quantités λ, μ, ν, ρ qui caractérisent la substitution composée en fonction des quantités analogues relatives aux rotations composantes. Nous allons les appliquer à l'étude de la question suivante.

5. Supposons qu'un trièdre $(T_1)\, Ox_1y_1z_1$, dont le sommet reste fixe, se déplace d'une manière quelconque et supposons qu'il soit rattaché à un trièdre fixe $(T)\, Oxyz$, par les formules (7) où λ, μ, ν, ρ seront des fonctions connues d'un paramètre t. Proposons-nous de déterminer, à chaque instant, les composantes de la rotation infiniment petite du trièdre (T_1), ces composantes étant prises relativement aux axes de ce trièdre. Nous remarquerons que, pour passer de (T_1) à sa position infiniment voisine (T'_1), on peut effectuer successivement deux substitutions orthogonales, l'une par laquelle on passerait de (T_1) à (T) et qui, étant l'inverse de la substitution (7), serait caractérisée par les valeurs $\lambda, \mu, \nu, -\rho$ des paramètres; l'autre, par laquelle on passerait de (T) à (T'_1) et qui correspondrait aux valeurs $\lambda + d\lambda$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$, $\rho + d\rho$ des mêmes paramètres. En appliquant donc les formules (16) et négligeant des infiniment petits dans l'expression nouvelle de ρ, on voit que les valeurs suivantes

$$(17)\qquad \begin{cases} \rho' = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = B, \\ \lambda' = \mu\, d\nu - \nu\, d\mu - \lambda\, d\rho + \rho\, d\lambda, \\ \mu' = \nu\, d\lambda - \lambda\, d\nu - \mu\, d\rho + \rho\, d\mu, \\ \nu' = \lambda\, d\mu - \mu\, d\lambda - \nu\, d\rho + \rho\, d\nu \end{cases}$$

seront les paramètres de la substitution orthogonale, par laquelle on passe de (T_1) à (T'_1).

Comme elles définissent, nous l'avons vu, les composantes de la rotation par laquelle (T'_1) vient coïncider avec (T_1), il faudra les changer de signe pour avoir la rotation du trièdre (T_1) et si l'on

applique les formules (1) en remplaçant $\tang\frac{\theta}{2}$ par $\frac{\theta}{2}$ et posant

$$(18) \qquad \theta\cos\alpha = P\,dt, \qquad \theta\cos\beta = Q\,dt, \qquad \theta\cos\gamma = R\,dt,$$

il viendra

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} BP &= 2\left(\nu\frac{d\mu}{dt} - \mu\frac{d\nu}{dt} + \lambda\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\lambda}{dt}\right),\\ BQ &= 2\left(\lambda\frac{d\nu}{dt} - \nu\frac{d\lambda}{dt} + \mu\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\mu}{dt}\right),\\ BR &= 2\left(\mu\frac{d\lambda}{dt} - \lambda\frac{d\mu}{dt} + \nu\frac{d\rho}{dt} - \rho\frac{d\nu}{dt}\right).\end{aligned}\right.$$

6. Si l'on suppose, comme il est permis, que ρ soit constamment égal à 1, ces formules se simplifieront un peu. Il vaudra mieux cependant, toutes les fois qu'on le pourra, conserver l'arbitraire ρ; car on introduira ainsi plus nettement et plus simplement les rotations qui correspondent à une valeur nulle de ρ et pour lesquelles, d'après les formules (1), l'angle θ est égal à 180°.

Dans notre *Mémoire sur l'équilibre astatique,* nous avons proposé d'appeler ces rotations des *renversements.* Nous allons terminer cette Note en montrant que les *renversements,* joints à des *inversions planes,* c'est-à-dire à des transformations par symétrie relatives à des plans, permettent d'étudier et de composer très simplement les divers mouvements finis d'un solide invariable. Nous nous appuierons, à cet effet, sur les remarques suivantes :

Une rotation d'angle θ autour d'un axe (d) *peut être remplacée par deux inversions successives relatives à des plans* (P_1), (P_2) *se coupant suivant l'axe et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$. On peut faire tourner, comme on voudra, le dièdre de ces deux plans autour de l'axe.*

Un renversement autour de (d) *se ramène, par suite, à deux inversions relatives à deux plans rectangulaires quelconques se coupant suivant la droite* (d).

Il résulte de ces propositions que toute rotation d'angle θ autour d'une droite (d) se ramène à deux renversements autour de deux droites (δ_1), (δ_2), perpendiculaires en un point quelconque à la droite (d) et assujetties, en outre, à faire l'angle $\frac{\theta}{2}$. Car, soient (P_1), (P_2), (P) les trois plans passant respectivement par (d) et (δ_1), par (d) et (δ_2), par (δ_1) et (δ_2). Le premier renversement équivaut aux

inversions relatives aux deux plans rectangulaires (P_1) et (P); le second équivaut de même aux inversions déterminées par les plans (P) et (P_2). Il faut donc effectuer successivement des inversions planes relatives aux plans (P_1), (P), (P), (P_2). Les deux inversions intermédiaires se détruisent et il reste les seules inversions extrêmes, qui équivalent, nous l'avons vu, à la rotation considérée.

On peut imprimer aux deux droites (δ_1), (δ_2) le mouvement d'un verrou autour de (d), c'est-à-dire les faire glisser et tourner tout d'une pièce d'une manière quelconque autour de (d), sans qu'elles cessent de représenter la rotation. Ainsi :

Une rotation est parfaitement représentée par un angle dont le sommet est sur l'axe de rotation, son plan étant perpendiculaire à cet axe et sa grandeur étant égale à la moitié de la rotation.

Une translation finie peut être représentée par deux inversions relatives à des plans parallèles, qui sont perpendiculaires à la translation, et dont la distance est égale à la moitié de la translation.

Si l'on intercale, entre ces deux inversions, deux autres inversions prises relativement à un même plan perpendiculaire aux précédents, inversions dont l'ensemble ne produit aucun déplacement, on voit que *toute translation finie équivaut à deux renversements autour de deux droites parallèles qui sont perpendiculaires à cette translation et dont la distance est égale à la moitié de la translation. Le plan de ces droites est parallèle à la translation.*

7. Ces points étant admis, considérons d'abord une figure avec un point fixe O et voyons comment on composera deux rotations successives. La première sera représentée par un angle AOA_1, la seconde par un angle BOB_1. Soit OC l'intersection du plan des deux angles. Faisons tourner le premier dans son plan, de manière à amener OA_1 sur OC, ce qui le remplacera par un angle DOC. Faisons tourner de même le second dans son plan, de manière à faire coïncider OB avec OC, ce qui le remplacera par un angle COD_1. Pour composer les rotations, il faudra effectuer des renversements autour des droites OD, OC, OC et OD_1. Les deux renversements intermédiaires se détruisant, il restera seulement ceux qui ont lieu autour de OD et OD_1; c'est-à-dire la rotation que nous définissons par l'angle DOD_1.

La méthode précédente n'exige même pas que l'on admette que tout déplacement d'une figure ayant un point fixe se réduit à une rotation; car il est évident que ce déplacement peut toujours se ra-

mener à deux rotations, l'une qui amènera un point M quelconque dans sa nouvelle position M_1 et qui pourra être choisie d'une infinité de manières, l'autre qui s'effectuera autour de OM_1. Comme nous apprenons à composer deux rotations, on voit qu'on pourra toujours réduire tout déplacement à une seule rotation.

Passons maintenant au mouvement le plus général. On peut toujours le réaliser en amenant, par une translation, un point M de la figure invariable dans sa nouvelle position M_1, puis en effectuant une rotation autour d'un axe passant par M_1. La translation se ramène à deux inversions relatives à deux plans parallèles (P), (P_1); la rotation équivaut de même à deux inversions autour de plans qui se coupent, (P_2), (P_3). Donc, tout déplacement équivaut à quatre inversions autour des plans (P), (P_1), (P_2), (P_3), dont les premiers sont parallèles. Mais, comme on peut faire tourner le dièdre $(P_1)(P_2)$ d'un angle quelconque autour de son arête, on peut supposer que les plans précédents ne sont plus parallèles. Alors les deux premières inversions définiront une rotation ainsi que les deux suivantes. Donc :

Le déplacement d'une figure invariable se ramène d'une infinité de manières à deux rotations successives.

Soient (d) et (d_1) les axes de ces rotations et (δ) leur plus courte distance. La rotation autour de (d) peut être remplacée, nous l'avons vu, par deux renversements autour de deux droites, dont la seconde sera (δ); soient (δ_1) et (δ) ces deux droites. Il suffit que (δ_1) coupe (d), à angle droit, au même point que (δ), et fasse avec (δ), dans le sens convenable, un angle égal à la moitié de la rotation. De même la seconde rotation pourra être remplacée par deux renversements autour de deux droites (δ), (δ_2), pourvu que (δ_2) soit convenablement choisie. On aura donc à effectuer quatre renversements, dont deux consécutifs autour de (δ) se détruiront. Donc :

Tout déplacement d'une figure invariable se ramène par des constructions géométriques à deux renversements successifs autour de deux droites (δ_1), (δ_2).

De cette proposition fondamentale on fait dériver simplement la notion du mouvement hélicoïdal fini. Car menons par (δ_1) deux plans rectangulaires (P_1), (P'_1) dont le premier soit parallèle à (δ_2); menons de même par (δ_1) deux plans rectangulaires (P_2), (P'_2) dont le premier soit parallèle à (δ_1) et, par suite, à (P_1). Les deux renversements se ramèneront aux inversions planes relatives aux plans (P'_1), (P_1), (P_2), (P'_2). Les deux inversions intermédiaires, étant relatives à

des plans parallèles, équivalent à une translation, qu'on peut échanger ensuite, soit avec la première, soit avec la dernière inversion plane. Ces deux inversions, étant rapprochées, se composent en une rotation, qui a lieu autour de la plus courte distance de (δ_1) et de (δ_2).

On voit donc que *tout déplacement fini se ramène à une rotation et à une translation parallèle à l'axe de la rotation.*

8. De même qu'une rotation est représentée par un angle, le déplacement précédent peut être représenté comme il suit : Prenons sur l'axe deux points A et B séparés par une distance égale à la moitié de la translation et élevons en A et B deux perpendiculaires à l'axe, (δ_1), (δ_2), faisant un angle égal à la moitié de la rotation. Le déplacement sera défini par ces deux droites ; car il équivaudra à deux renversements successifs autour d'elles. *On pourra leur imprimer, d'ailleurs, le mouvement du verrou autour de l'axe,* c'est-à-dire les faire glisser et tourner d'une manière quelconque autour de l'axe, sans qu'elles cessent de définir et de représenter le mouvement hélicoïdal.

De là résulte un moyen très simple de composer deux mouvements finis quelconques. Car soient (δ_1), (δ_2) ; (δ'_1), (δ'_2) les droites qui les définissent et soit (d) la plus courte distance des axes des deux mouvements [qui sont les plus courtes distances de (δ_1), (δ_2) et de (δ'_1), (δ'_2) respectivement]. On pourra, en faisant tourner et glisser (δ_1), (δ_2) autour de l'axe du premier mouvement, amener (δ_2) à coïncider avec (d) ; en opérant de même dans le second mouvement, on amènera (δ'_1) en coïncidence avec (d). Alors les deux renversements intermédiaires autour de la droite (d) se détruiront, et le mouvement composé se réduira aux deux renversements autour des nouvelles positions de (δ_1), (δ'_2), c'est-à-dire qu'il sera complètement et simplement défini.

Inversement, si l'on veut étudier les décompositions d'un mouvement donné, en deux rotations par exemple, la méthode précédente donnera très aisément la solution. Car soient (δ_1), (δ_2) les deux droites définissant un mouvement ; on leur adjoindra une droite (δ) les rencontrant toutes deux, et il est clair que le mouvement pourra être remplacé par les rotations définies, la première par l'angle des droites (δ_1), (δ), la seconde par l'angle des droites (δ), (δ_2). Nous nous contenterons de ces rapides indications en faisant remarquer toutefois que, dans l'Ouvrage cité plus haut [III, p. 479], nous avons appliqué des méthodes analogues à la composition des inversions sphériques.

NOTE VI.

NOTE SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ET SUR LES SURFACES SPIRALES.

1. Au n° 90, où nous avons considéré pour la première fois les surfaces *spirales,* nous avons vu que leur élément linéaire peut toujours être ramené à la forme (42) [I, p. 110]. Cette forme est équivalente à celle qui est définie par la formule suivante

$$ds^2 = U^2 e^{2v}(du^2 + dv^2), \tag{1}$$

où U désigne une fonction de u. Conformément à une remarque qui est due à M. Maurice Lévy, nous avons reconnu que cette forme convient à une infinité de surfaces spirales. Car si l'on définit une telle surface par les équations

$$\left\{\begin{aligned} Z &= ze^v, \\ X &= re^v \cos(\omega + hv), \\ Y &= re^v \sin(\omega + hv), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où h désigne une constante et où z, r, ω sont des fonctions de u, on aura, en exprimant que l'élément linéaire est donné par la formule (1), les trois relations suivantes

$$\left\{\begin{aligned} U^2 &= r^2(1 + h^2) + z^2, \\ 0 &= zz' + rr' + hr^2\omega', \\ U^2 &= r^2\omega'^2 + z'^2 + r'^2, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

qui, pour chaque valeur de h, déterminent les fonctions r, z, ω. Nous nous proposons maintenant de compléter les résultats précédents et de prouver que l'intégration du système précédent se ramène à celle

d'une équation différentielle remarquable, déjà rencontrée et signalée d'ailleurs dans différentes parties de cet Ouvrage [1].

A l'inspection des équations (3) on reconnaît immédiatement que, en supposant $1+h^2$ différent de zéro, l'on pourra, par l'élimination de r et de ω, obtenir pour z une équation différentielle du premier ordre. On déduit, en effet, des deux premières

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} r^2 &= \frac{U^2-z^2}{h^2+1},\\ r^2\omega' &= -\frac{hzz'+\frac{1}{h}UU'}{h^2+1}.\end{aligned}\right.$$

En éliminant, au moyen de ces équations, r et ω dans la troisième équation (3), il restera pour z l'équation différentielle

$$(5)\qquad z^2+z'^2 = U^2-\frac{U'^2}{h^2},$$

dont l'intégration seule pourra faire connaître les surfaces cherchées.

2. Or, au n° 621 [III, p. 83], nous avons rencontré l'équation suivante

$$(6)\qquad P^2+\left(\frac{dP}{dv}\right)^2 = V,$$

qui ne diffère de la précédente que par les notations; et nous avons vu que l'intégration de cette équation différentielle permet de déterminer toutes les lignes géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire est défini par la formule

$$ds^2 = V[du^2+(u+V_1)^2\,dv^2].$$

V_1 est, comme V, une fonction de v; toutes les fois que cette fonction se réduit à une constante, l'élément linéaire, nous l'avons vu, se réduit à celui des surfaces spirales.

On peut donc dire que l'intégration d'une équation différentielle de la forme (5) ou (6) fera connaître les lignes géodésiques d'une infinité de surfaces, parmi lesquelles se trouveront des surfaces spirales, et dont l'élément linéaire dépendra d'une fonction arbitraire V_1 (en dehors de celle V qui figure dans l'équation).

---

[1] On pourra consulter la Note *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire*, insérée par M. Raffy au Tome CXII, p. 1421 des *Comptes rendus*, en 1891.

Enfin, au n° 732 [III, p. 303], nous nous sommes proposé de déformer une surface réglée de telle manière que l'une de ses courbes, assignée à l'avance, devienne plane, et nous avons reconnu que la solution de ce problème dépend d'une équation différentielle du premier ordre appartenant au type suivant

$$\text{(7)} \qquad My^2 + 2Nyy' + Py'^2 = 1,$$

où M, N, P sont des fonctions quelconques de la variable indépendante x. Cette nouvelle forme comprend évidemment comme cas particulier les formes (5) et (6) : nous nous proposons de justifier une indication déjà donnée [III, p. 304, note] et de montrer tout l'intérêt que présente l'étude analytique des équations différentielles précédentes.

Remarquons d'abord que l'on peut très aisément ramener l'équation (7) à la forme (5). En effet, écrivons-la comme il suit

$$(Py' + Ny)^2 + (PM - N^2)y^2 = P.$$

Si l'on détermine une fonction X par la quadrature

$$X = e^{\int \frac{N}{P} dx},$$

et si l'on effectue la substitution

$$\text{(8)} \qquad y = \frac{u}{X},$$

l'équation deviendra

$$P^2 u'^2 + (PM - N^2) u^2 = PX^2,$$

et il suffira de changer la variable indépendante en substituant à x la variable définie par la quadrature suivante

$$\text{(9)} \qquad x' = \int \frac{\sqrt{PM - N^2}}{P} dx,$$

pour obtenir la forme réduite

$$\text{(10)} \qquad u^2 + \left(\frac{du}{dx'}\right)^2 = \frac{PX^2}{PM - N^2},$$

où il faudra exprimer le second membre en fonction de x'.

3. Puisque les formes (10) et (7) ont le même degré de généralité, gardons l'équation (7), et voyons comment on pourra la ramener à une équation du premier ordre *et du premier degré*.

Il suffit pour cela de prendre comme inconnue auxiliaire le quotient suivant

$$(11) \qquad \frac{y}{y'} = \lambda.$$

On aura alors

$$(12) \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{M\lambda^2 + 2N\lambda + P}}, \qquad y = \frac{\lambda}{\sqrt{M\lambda^2 + 2N\lambda + P}}.$$

En exprimant que y' est la dérivée de y, on trouvera pour λ l'équation

$$(13) \qquad 2(N\lambda + P)\lambda' = M'\lambda^3 + 2(N' + M)\lambda^2 + (P' + 4N)\lambda + 2P,$$

qui est bien de la forme annoncée.

Si l'on considère toutes les équations du premier ordre et du premier degré

$$y' = f(x, y),$$

et si l'on se propose de les classer d'après la manière dont y entre dans la fonction f, on rencontre tout d'abord l'équation linéaire et l'équation de Riccati. La plus simple, après celles-là, si l'on admet toutefois que la variable y puisse être soumise à une substitution homographique sans que la forme de l'équation soit altérée, est la suivante

$$(14) \qquad y' = \frac{ay^3 + by^2 + cy + d}{ey + f},$$

où a, b, c, d, e, f sont des fonctions données, mais quelconques, de la variable indépendante.

L'équation précédente contient l'équation (13) comme cas particulier; nous allons montrer que, si l'on en connaît des solutions particulières, on pourra toujours, par des substitutions simples, la ramener à une forme type ne contenant plus qu'une fonction arbitraire.

4. Appuyons-nous sur la propriété essentielle : l'équation ne change pas de forme lorsqu'on effectue sur la variable y une substitution homographique quelconque. D'après cela, si l'on connaît trois solutions particulières y_0, y_1, y_2, effectuons la substitution homographique qui leur fait correspondre les valeurs $0, 1, \infty$. La nouvelle équation devant admettre ces solutions particulières, on aura

$$a = d = 0, \qquad b + c = 0,$$

et elle prendra la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)}{ey+f}.$$

En changeant de variable indépendante on pourra simplifier encore et réduire à l'unité une des fonctions e ou f, avoir, par exemple, la forme typique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1-y)}{a-y}. \tag{15}$$

La manière même dont nous l'avons obtenue prouve qu'il y aura un nombre illimité de formes typiques.

On peut encore effectuer dans l'équation (14) la substitution

$$ey+f = \frac{1}{z}; \tag{16}$$

on aura alors pour z l'équation différentielle

$$z' = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3; \tag{17}$$

la dérivée est, cette fois, une fonction entière de z.

La forme précédente est conservée si l'on effectue sur z une substitution de la forme

$$z = A\lambda + B; \tag{18}$$

on peut disposer des fonctions A et B de manière à faire correspondre à deux solutions particulières z_0, z_1 deux valeurs constantes h, h' de λ. Alors l'équation en λ prendra la forme simple

$$\lambda' = (\lambda - h)(\lambda - h')(C\lambda + D). \tag{19}$$

Un changement de variable réduira à l'unité l'une des fonctions C ou D.

5. Cette nouvelle transformation permet de montrer que l'intégration de l'équation générale (14) peut se ramener à celle de l'équation

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = X \tag{20}$$

et *vice versa*. Car si l'on effectue ici la substitution

$$y = \lambda \frac{dy}{dx} \tag{21}$$

on trouve pour λ l'équation

$$\lambda' = (\lambda^2 + 1)\left(1 - \lambda \frac{X'}{2X}\right); \tag{22}$$

et il est clair que, par un changement de la variable indépendante et par un choix convenable des constantes arbitraires h, h', on peut ramener l'un à l'autre les deux types (19) et (22).

6. Nous avons indiqué, dans le cours de cet Ouvrage, et notamment dans la théorie des lignes géodésiques, plusieurs cas particuliers dans lesquels on peut intégrer l'équation (20) et, par suite, l'équation (14). Nous nous contenterons des rapprochements que nous venons de signaler en faisant remarquer que l'on pourra obtenir en quelque sorte une suite illimitée d'équations intégrables de la forme (14) en cherchant celles qui admettent des facteurs intégrants de la forme suivante

$$(y - X_1)^{m_1}(y - X_2)^{m_2}\ldots,$$

m_1, m_2, ... étant des constantes et X_1, X_2, ... des fonctions de x. Dans un Mémoire *sur quelques équations différentielles non linéaires*, inséré en 1887 au *Journal de l'École Polytechnique* [LVII^e Cahier, p. 189], M. R. Liouville a développé quelques propositions relatives à l'équation précédente, prise sous la forme (17).

NOTE VII.

SUR LA FORME DES LIGNES DE COURBURE DANS LE VOISINAGE D'UN OMBILIC.

1. Dans l'étude que nous avons faite à différentes reprises du système orthogonal formé par les lignes de courbure d'une surface, nous avons laissé de côté l'examen de la question qui va faire l'objet de cette Note.

Le problème que nous nous proposons a déjà été étudié par différents géomètres, et notamment par l'illustre Cayley (¹). Bien qu'un peu spécial par sa nature même, il offre un vif intérêt, parce que sa solution complète exige l'application des méthodes employées pour l'étude des points critiques des équations différentielles par Briot et Bouquet et par leurs continuateurs dans ce genre de recherches, MM. Poincaré et Picard. Nous allons démontrer ici les résultats que nous avons communiqués en 1883 à l'Académie des Sciences (²).

2. Si l'on place l'origine des coordonnées rectangulaires à l'ombilic, en choisissant pour plan des xy le plan tangent en ce point à la surface donnée, l'équation de cette surface prendra la forme suivante

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} z = {} & \frac{k}{2}(x^2+y^2)+a\frac{x^3}{6}+\frac{b}{2}x^2y+\frac{b'}{2}xy^2+\frac{a'}{6}y^3 \\ & +\frac{\alpha}{24}x^4+\frac{\beta}{6}x^3y+\frac{\gamma}{4}x^2y^2+\frac{\beta'}{6}xy^3+\frac{\alpha'}{24}y^4+\ldots, \end{aligned}\right.$$

(¹) A. Cayley, *On differential Equations and umbilici* (*Philosophical Magazine*, vol. XXVI, p. 373-379 et 441-452; 1863). *Voir* aussi *the Collected mathematical Papers of* Arthur Cayley, vol. V, p. 115.

M. Émile Picard a bien voulu me communiquer les épreuves du tome III de son *Traité d'Analyse* où il rattache l'étude de cette question particulière aux théories générales qu'il a développées sur les points singuliers des équations différentielles.

(²) *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes* (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 1133). *Voir* aussi *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VI, p. 385.

où k désigne l'inverse du rayon de courbure principal, les termes non écrits étant du 5e ordre au moins par rapport à x et à y. Si nous désignons ici par P, Q, R, S, T les dérivées premières et secondes de z, qui entrent dans l'équation différentielle des lignes de courbure, nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= kx + \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{b'}{2}y^2 + \alpha\frac{x^3}{6} + \frac{\beta}{2}x^2y + \frac{\gamma}{2}xy^2 + \frac{\beta'}{6}y^3 + \ldots,\\ \mathrm{Q} &= ky + \frac{b}{2}x^2 + b'xy + \frac{a'}{2}y^2 + \frac{\beta}{6}x^3 + \frac{\gamma}{2}x^2y + \frac{\beta'}{2}xy^2 + \frac{\alpha'}{6}y^3 + \ldots,\\ \mathrm{R} &= k + ax + by + \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta xy + \frac{\gamma}{2}y^2 + \ldots,\\ \mathrm{S} &= bx + b'y + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma xy + \frac{\beta'}{2}y^2 + \ldots,\\ \mathrm{T} &= k + b'x + a'y + \frac{\gamma}{2}x^2 + \beta'xy + \frac{\alpha'}{2}y^2 + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs des dérivées dans l'équation différentielle des lignes de courbure

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &[\mathrm{S}(1+\mathrm{P}^2) - \mathrm{PQR}]\,dx^2 + [\mathrm{T}(1+\mathrm{P}^2) - \mathrm{R}(1+\mathrm{Q}^2)]\,dx\,dy\\ &\qquad + [\mathrm{PQT} - \mathrm{S}(1+\mathrm{Q}^2)]\,dy^2 = 0; \end{aligned}\right.$$

il viendra

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[bx + b'y + \frac{\beta}{2}x^2 + (\gamma - k^3)xy + \frac{\beta'}{2}y^2\right](dx^2 - dy^2)\\ &\quad + \left[(b'-a)x + (a'-b)y\right.\\ &\qquad \left. + \left(\frac{\gamma-\alpha}{2} + k^3\right)x^2 + (\beta'-\beta)xy + \left(\frac{\alpha'-\gamma}{2} - k^3\right)y^2\right]dx\,dy\\ &\qquad\qquad + \mathrm{M}\,dx^2 + \mathrm{N}\,dx\,dy + \mathrm{M}'\,dy^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

M, N, M′ étant du troisième degré au moins par rapport aux coordonnées x et y.

3. Pour l'ombilic, nous nous trouvons dans ce cas exceptionnel où l'équation différentielle est de degré supérieur par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et où le coefficient différentiel devient indéterminé.

Remarquons d'abord, pour expliquer la méthode que nous allons suivre, que, lorsqu'en un point A le coefficient différentiel devient indéterminé, on peut *considérer ce point, accompagné de toutes les tangentes qui y passent, comme donnant une solution particulière*

de l'équation différentielle. Si l'on prend, en effet, les polaires réciproques des courbes intégrales, elles satisfont encore à une équation différentielle du premier ordre que l'on formera aisément. Et alors, *au point* A, *pour lequel le coefficient différentiel est indéterminé,* correspondra *une droite dont le point de contact sera indéterminé,* c'est-à-dire une droite (d) *qui sera une solution particulière de la nouvelle équation différentielle.* Par suite, au lieu d'étudier les solutions de la première équation dans le voisinage du point A où le coefficient différentiel est indéterminé, on pourra étudier les solutions de la seconde qui sont voisines de la droite (d), *ce qui ne présentera de difficulté que pour certains points exceptionnels de la droite.*

Pour appliquer cette remarque, effectuons la substitution si souvent employée, qui remplace la courbe cherchée par sa polaire réciproque relative à la parabole

$$Y = \frac{X^2}{2};$$

c'est-à-dire introduisons, à la place de x et y, les variables p et u définies par les équations

$$(5)\qquad p = \frac{dy}{dx}, \qquad u = px - y,$$

de sorte que l'on aura

$$(6)\qquad x = \frac{du}{dp}, \qquad y = px - u;$$

et que l'équation de la tangente à la courbe cherchée sera

$$Y = pX - u.$$

Avec ces nouvelles variables, l'équation différentielle qui représente la ligne de courbure ou, plus exactement, sa projection sur le plan tangent, prendra la forme suivante :

$$(7)\qquad H\frac{du}{dp} + Ku + H_1\frac{du^2}{dp^2} + K_1 u\frac{du}{dp} + L_1 u^2 + \varphi = 0,$$

où l'on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll} H = & b & + (2b' - a)p + (a' - 2b)p^2 - b'p^3, \\ K = & - b' & + \ (b - a')p + b'p^2, \\ H_1 = & \dfrac{\beta}{2} & + \dfrac{3\gamma - \alpha}{2}p \ + 3\dfrac{\beta' - \beta}{2}p^2 + \dfrac{\alpha' - 3\gamma}{2}p^3 - \dfrac{\beta'}{2}p^4, \\ K_1 = & k^3 - \gamma & + (\beta - 2\beta')p + (2\gamma - \alpha' + k^3)p^2 + \beta' p^3, \\ L_1 = & \dfrac{\beta'}{2} & + \left(\dfrac{\alpha' - \gamma}{2} - k^3\right)p - \dfrac{\beta'}{2}p^2, \end{array}\right.$$

et où les termes contenus dans φ seront du troisième degré *au moins* par rapport aux deux variables u, $\frac{du}{dp}$.

4. Nous voulons obtenir les solutions pour lesquelles x et y, c'est-à-dire d'après les équations (5) et (6), u et $\frac{du}{dp}$ sont très petits, la variable indépendante nouvelle p pouvant recevoir des valeurs quelconques. A cet effet, effectuons la substitution

$$u = \alpha u', \tag{9}$$

α étant une constante très petite et u' étant supposée finie; l'équation différentielle prendra la forme

$$\frac{du'}{dp} = -\frac{K}{H} u' - \alpha \frac{H_1}{H} \frac{du'^2}{dp^2} - \frac{\alpha K_1}{H} u' \frac{du'}{dp} - \frac{\alpha L_1}{H} u'^2 - \alpha^2 \varphi'. \tag{10}$$

Pourvu que nous écartions les valeurs de p, pour lesquelles on a

$$H = 0, \tag{11}$$

l'intégration par les séries de l'équation différentielle précédente nous donnera une fonction u' développable suivant les puissances de α. Par suite, si nous supposons que p varie entre deux limites p_0, p_1 *ne comprenant aucune racine de l'équation* $H = 0$ et si nous supposons que u' soit assujettie, par exemple, à rester égale à l'unité pour $p = p_0$, u' sera une fonction continue de α dans tout l'intervalle (p_0, p_1) et elle se réduira, pour $\alpha = 0$, à la fonction qui satisfait à l'équation

$$\frac{du'}{dp} = -\frac{K}{H} u'. \tag{12}$$

Si donc nous conservons cette unique équation, son intégration nous conduira nécessairement à une courbe qui sera semblable à la ligne de courbure infiniment petite, réserve faite, pour le moment, des parties de la courbe qui sont dans le voisinage des points où le coefficient angulaire de la tangente satisfait à l'équation (11).

5. Il convient donc d'abord d'étudier l'équation précédente, identique au fond à celle qui a été considérée par Cayley; l'intégration de cette équation nous donnera la solution de ce que nous pouvons appeler la *partie principale* du problème.

Si nous remplaçons les polynômes H et K par leurs expressions,

l'équation devient

$$(13)\qquad \frac{du'}{u'} = \frac{b'p^2 + (b - a')p - b'}{b'p^3 + (2b - a')p^2 + (a - 2b')p - b}\,dp.$$

Les variables sont séparées et l'intégration n'offre aucune difficulté. Au lieu des arbitraires a, b, a', b', nous allons mettre en évidence les racines du dénominateur H, que nous supposerons distinctes. Soient α, β, γ ces racines; on aura

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} b &= b'\alpha\beta\gamma, & a &= b'(2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma),\\ a - 2b' &= b'(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma), & a' &= b'(2\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma),\\ a' - 2b &= b'(\alpha + \beta + \gamma), & b &= b'\alpha\beta\gamma. \end{aligned}\right.$$

En introduisant les quantités A, B, C déterminées par les formules suivantes [1]

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= -\frac{(1 + \alpha\beta)(1 + \alpha\gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}, & A - 1 &= -\frac{(1 + \alpha^2)(1 + \beta\gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)},\\ B &= -\frac{(1 + \beta\gamma)(1 + \beta\alpha)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}, & B - 1 &= -\frac{(1 + \beta^2)(1 + \alpha\gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)},\\ C &= -\frac{(1 + \gamma\alpha)(1 + \gamma\beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, & C - 1 &= -\frac{(1 + \gamma^2)(1 + \alpha\beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}, \end{aligned}\right.$$

l'équation deviendra

$$(16)\qquad \frac{du'}{u'} = \frac{A\,dp}{p - \alpha} + \frac{B\,dp}{p - \beta} + \frac{C\,dp}{p - \gamma}.$$

En intégrant, nous aurons

$$(17)\qquad u' = M(p - \alpha)^A (p - \beta)^B (p - \gamma)^C,$$

M désignant une constante arbitraire. Si l'on pose

$$(18)\qquad v = M(p - \alpha)^{A-1}(p - \beta)^{B-1}(p - \gamma)^{C-1},$$

les valeurs de x et de y déduites des formules (6) seront

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= v[p^2 - 1 - p(\alpha\beta\gamma + \alpha + \beta + \gamma)],\\ y &= v[-\alpha\beta\gamma(p^2 - 1) - (1 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)p]. \end{aligned}\right.$$

---

[1] Il résulte de ces expressions de A, B, C que les polynômes K et H ne peuvent avoir une racine commune sans en avoir deux.

On déduit de ces expressions les formules bien plus élégantes

$$(20)\qquad \begin{cases} y-\alpha x = -\rho(p-\alpha)(1+p\alpha)(1+\beta\gamma),\\ y-\beta x = -\rho(p-\beta)(1+p\beta)(1+\gamma\alpha),\\ y-\gamma x = -\rho(p-\gamma)(1+p\gamma)(1+\alpha\beta).\end{cases}$$

On voit que la forme limite de la ligne de courbure est loin d'être un cercle, comme l'ont pensé quelques auteurs.

6. Nous allons maintenant discuter les résultats précédents et nous commencerons par supposer α, β, γ réels.

Introduisons les angles α', β', γ' définis par les formules

$$(21)\qquad \alpha = \operatorname{tang}\alpha',\qquad \beta = \operatorname{tang}\beta',\qquad \gamma = \operatorname{tang}\gamma',$$

on trouvera alors

$$(22)\qquad \begin{cases} A = -\cot(\alpha'-\gamma')\cot(\alpha'-\beta'), & A-1 = -\dfrac{\cos(\beta'-\gamma')}{\sin(\alpha'-\beta')\sin(\alpha'-\gamma')},\\ B = -\cot(\beta'-\alpha')\cot(\beta'-\gamma'), & B-1 = -\dfrac{\cos(\gamma'-\alpha')}{\sin(\beta'-\alpha')\sin(\beta'-\gamma')},\\ C = -\cot(\gamma'-\alpha')\cot(\gamma'-\beta'), & C-1 = -\dfrac{\cos(\alpha'-\beta')}{\sin(\gamma'-\alpha')\sin(\gamma'-\beta')}.\end{cases}$$

En considérant sur le cercle trigonométrique les extrémités des six arcs

$$\alpha',\quad \beta',\quad \gamma',\quad \frac{\pi}{2}+\alpha',\quad \frac{\pi}{2}+\beta',\quad \frac{\pi}{2}+\gamma',$$

et tenant compte de ce qu'on peut faire tourner les axes dans leur plan ou augmenter de π l'un des arcs α', β', γ', on verra facilement que toutes les dispositions différentes de ces quantités peuvent se ramener aux suivantes.

Ou bien il est possible d'enfermer dans un même angle droit les trois droites de coefficients angulaires α, β, γ; et alors les six angles donneront lieu à la disposition suivante

$$(\mathrm{I})\qquad \alpha',\quad \beta',\quad \gamma',\quad \frac{\pi}{2}+\alpha',\quad \frac{\pi}{2}+\beta',\quad \frac{\pi}{2}+\gamma',$$

quand on les rangera par ordre de grandeur croissante.

Ou bien il sera impossible d'enfermer les trois droites dans un angle droit, ce qui donnera naissance à la disposition

$$(\mathrm{II})\qquad \alpha',\quad \beta',\quad \frac{\pi}{2}+\alpha',\quad \gamma',\quad \frac{\pi}{2}+\beta',\quad \frac{\pi}{2}+\gamma'.$$

En se reportant aux formules (22), on trouvera les signes suivants pour les exposants

	A.	B.	C.	A — 1.	B — 1.	C — 1.
Disposition I.......	—	+	—	—	+	—
Disposition II......	+	+	+	—	—	—

Avec la disposition I, il y aura deux directions asymptotiques de coefficients angulaires α et γ; car ρ devient infini, ainsi que x et y, lorsque p s'approche de α ou de γ. Comme $y-\alpha x$, $y-\gamma x$ deviennent aussi infinies, les branches infinies sont toutes deux paraboliques.

Lorsque p tend vers β, la courbe passe à l'origine; on a approximativement

$$\rho = K'(p-\beta)^{B-1},$$

$$x = K''(p-\beta)^{B-1},$$

$$y-\beta x = K'''(p-\beta)^{B},$$

K', K'', K''' désignant des constantes. On déduit de là

$$y-\beta x = Lx^{\frac{B}{B-1}}, \tag{23}$$

L désignant une quantité finie. Si B n'est pas commensurable, cette singularité n'est pas algébrique.

On trouverait de même, pour les branches paraboliques, les expressions approchées

$$y-\alpha x = L_1 x^{\frac{A}{A-1}}, \tag{24}$$ $$y-\gamma x = L_2 x^{\frac{C}{C-1}}. \tag{25}$$

La *fig.* 91, construite pour l'hypothèse particulière.

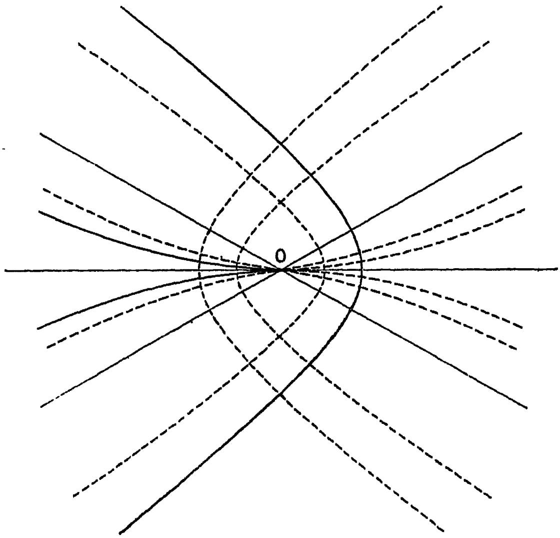
$$\alpha' = -\frac{\pi}{6}, \qquad \beta' = 0, \qquad \gamma' = \frac{\pi}{6},$$

donne une idée de la forme que présentent, dans ce cas, les différentes lignes définies par l'équation (12).

Dans la disposition II, x et y deviennent toujours infinis quand p s'approche de l'une des valeurs α, β, γ; mais $y-\alpha x$, $y-\beta x$, $y-\gamma x$ tendent vers zéro. La courbe admet pour asymptotes les trois droites issues de l'origine et de coefficients angulaires α, β, γ. La *fig.* 92 fait connaître la forme qu'affectent, dans ce cas, les projections des lignes de courbure.

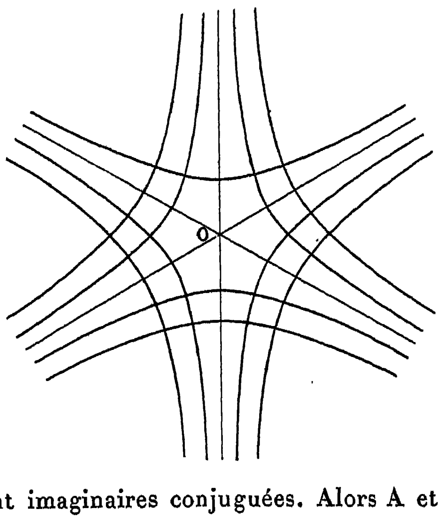
Aucune d'elles, sauf les trois droites qui sont des solutions particulières de l'équation différentielle, ne passe à l'ombilic O.

Fig. 91.



7. Supposons maintenant que deux des racines α, β, γ, β et γ par

Fig. 92.



exemple, soient imaginaires conjuguées. Alors A et $A - 1$ sont négatifs, et la courbe a une branche parabolique.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait

$$\beta = i, \qquad \gamma = -i.$$

Alors en faisant tourner les axes, on pourra supposer

$$\alpha = 0,$$

et les projections des lignes de courbure, représentées par l'équation

$$y^2 + x^2 = (x - 2\mathrm{M})^2,$$

seront des paraboles homofocales.

L'hypothèse que nous venons de faire est celle qui convient aux ombilics des surfaces du second degré. Dans ce cas, en effet, les termes du troisième degré dans l'expression de z doivent être divisibles par les termes du second degré. On a alors

$$a = 3b', \qquad a' = 3b$$

et l'équation

$$b'p^3 + (2b - a')p^2 + (a - 2b')p - b = 0,$$

qui admet les racines α, β, γ, se réduit bien à la suivante

$$(b'p - b)(p^2 + 1) = 0.$$

Nous nous bornerons à ces hypothèses générales, nous contentant de signaler, par exemple, le cas où l'on aurait

$$1 + \alpha\gamma = 0.$$

Cette seule condition entraîne les conséquences suivantes

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0, \qquad \mathrm{B} = 1.$$

Dans ce cas, notre équation différentielle admet les solutions

$$p = \alpha, \qquad p = \gamma,$$

qui correspondent à deux séries de droites rectangulaires.

8. Il nous paraît utile, avant de poursuivre cette étude, d'indiquer dès à présent, les conséquences auxquelles conduisent les résultats précédents, tout incomplets qu'ils soient encore. Il n'est pas douteux que, si une surface a toutes ses lignes de courbure algébriques, la petite ligne de courbure que nous venons de déterminer devra être

algébrique *pour chaque ombilic de la surface.* Il sera donc nécessaire que, pour chaque ombilic, les trois nombres A, B, C soient *réels et commensurables.* Cette condition ne sera pas suffisante; mais, toutes les fois qu'elle ne sera pas remplie, on pourra affirmer que les lignes de courbure ne sont pas algébriques, en général.

Appliquons cette remarque à la surface des ondes de Fresnel, dont les lignes de courbure ont été l'objet de si nombreuses recherches.

Déterminons d'abord les ombilics de cette surface ([1]). Pour cela, il faut la considérer comme l'*apsidale* d'un ellipsoïde (E). Nous rappellerons plus loin la définition de la *transformation apsidale.* Contentons-nous de remarquer ici que c'est une transformation de contact et que, comme toutes les transformations de ce genre, elle conserve *l'ordre* du contact entre deux surfaces quelconques. Par suite, à un ombilic, c'est-à-dire à un point où une sphère a un contact du second ordre avec la surface des ondes, correspond un point de l'ellipsoïde où la surface correspondante à une sphère, c'est-à-dire un tore dont le centre coïncide avec le centre de la surface, a un contact du second ordre avec l'ellipsoïde. Cherchons donc les points de l'ellipsoïde pour lesquels, parmi les surfaces osculatrices, se trouve un tore concentrique à l'ellipsoïde. Pour les déterminer, remarquons qu'en un point quelconque d'un tore, l'un des plans principaux contiendra l'axe et ira passer par le centre. De plus, l'un des centres de courbure principaux sera sur l'axe, l'autre sera le centre du cercle méridien de la surface; par suite, le segment formé par ces deux centres de courbure principaux sera vu du centre de la surface sous un angle droit.

Ainsi, les points de l'ellipsoïde qui donneront des ombilics de la surface des ondes doivent satisfaire à cette double condition que l'un des plans principaux aille passer par le centre et ensuite, que le segment formé par les centres de courbure principaux soit vu du centre sous un angle droit ([2]).

Les seuls points pour lesquels la première condition se trouve remplie sont ceux qui sont situés dans les plans principaux de l'ellipsoïde (E). Il résulte de là que *tous les ombilics de la surface des ondes sont situés sur les ellipses situées dans les plans principaux.*

([1]) Cette détermination des ombilics a été communiquée en 1878 au Congrès tenu à Paris par l'*Association française pour l'avancement des Sciences.*

([2]) M. Mannheim a obtenu le même résultat par des méthodes qui lui sont propres. *Voir* le *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique.* Deuxième édition, p. 334.

9. L'équation de cette surface est

$$\frac{x^2}{\rho^2-a^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1, \tag{26}$$

ρ^2 désignant le carré de la distance à l'origine

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2. \tag{27}$$

Considérons, par exemple, les ombilics situés dans le plan des xy. En mettant en évidence les coniques sections de la surface par ce plan, et en posant

$$\left\{\begin{aligned} U &= a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2,\\ V &= x^2+y^2-c^2, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

l'équation de la surface devient

$$c^2z^4+[U+c^2V+(c^2-a^2)(c^2-b^2)]z^2+UV=0. \tag{20}$$

Transportons l'origine en un point de la conique définie par l'équation

$$U=0,$$

et prenons comme nouveaux axes des x et des y la tangente et la normale à la conique en ce point. U prendra la forme suivante

$$U=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ey, \tag{30}$$

et la théorie des invariants montre que l'on aura

$$(AC-B^2)^2=AE^2,\qquad AC-B^2=a^2b^2,\qquad a^2+b^2=A+C. \tag{31}$$

D'autre part, V deviendra

$$V=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-c^2,$$

x_0 et y_0 étant les coordonnées du centre de la conique. On trouve ainsi

$$V=x^2+y^2+2\frac{Ay-Bx}{AC-B^2}E+\frac{A^2+B^2}{A}-c^2, \tag{32}$$

en tenant compte de la première relation (31).

Portant ces valeurs de U et V dans l'équation de la surface, nous trouvons

$$\begin{aligned} &+z^2\Big[(A+c^2)x^2+(C+c^2)y^2+2Bxy+2Ey\\ &\qquad+\frac{2c^2E}{AC-B^2}(Ay-Bx)+\frac{c^2-A}{A}(B^2-AC)\Big]\\ &+(Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Ey)\Big[x^2+y^2+\frac{2E}{AC-B^2}(Ay-Bx)+\frac{A^2+B^2}{A}-c^2 \end{aligned}$$

Faisons $y = 0$ dans cette équation. Les termes de degré moindre en x et z sont les suivants

$$z^2 \frac{c^2 - A}{A} (B^2 - AC) + (A^2 + B^2 - Ac^2) x^2.$$

Égalés à zéro, ils donneraient les tangentes asymptotiques au point considéré. Pour que ce point soit un ombilic, il faudra donc que l'on ait

$$\frac{(c^2 - A)(B^2 - AC)}{A} = A^2 + B^2 - Ac^2,$$

ce qui donne

$$c^2 = A + \frac{AB^2}{A^2 + B^2 - AC}. \tag{33}$$

Le développement de y ne présente d'ailleurs aucune difficulté et nous donne

$$y = -\frac{A}{2E}(x^2 + z^2) + \frac{AB}{2E^2}(x^3 - xz^2) + \alpha x^4 + \beta x^2 z^2 + \gamma z^4 + \ldots, \tag{34}$$

de sorte que l'on peut appliquer les résultats obtenus plus haut.

On a ici

$$b = a' = 0, \qquad a = -3b',$$

ce qui donne

$$\alpha = -\sqrt{5}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \sqrt{5},$$

$$A = \frac{2}{5}, \qquad B = \frac{1}{5}, \qquad C = \frac{2}{5}.$$

L'équation tangentielle des lignes de courbure dans le voisinage de l'ombilic est donc, l désignant une constante,

$$u^5 = lp(p^2 - 5)^2$$

Elle représente des courbes de la cinquième classe. On a ici

$$\varphi = \frac{\sqrt[5]{l}}{p^{\frac{4}{5}}(p^2 - 5)^{\frac{3}{5}}}, \qquad \begin{cases} x = (p^2 - 1)\varphi, \\ y = 4\varphi p. \end{cases}$$

Donc l'intersection de la courbe avec une droite

$$hx + h'y = 1$$

sera déterminée par l'équation

$$[h(p^2 - 1) + 4h'p]^5 = \frac{1}{l} p^4 (p^2 - 5)^3,$$

qui est du dixième degré en p. Ainsi les lignes de courbure sont

semblables, dans le voisinage de l'ombilic, à une courbe du dixième ordre et de la cinquième classe.

Ce résultat ne permettait pas d'affirmer que les lignes de courbure de la surface des ondes ne sont pas algébriques. Nous verrons dans la Note suivante comment on peut lever toute difficulté et trancher cette question.

10. Après cette application particulière, revenons au cas général et étudions la ligne de courbure dans ces régions que nous avons expressément réservées, c'est-à-dire pour les valeurs de p voisines d'une des valeurs singulières α, β, γ qui annulent le polynôme H.

Supposons, par exemple, que l'on veuille étudier la ligne de courbure dans le voisinage de la valeur

$$p = \alpha.$$

Pour plus de netteté, nous introduisons une variable auxiliaire p' définie par la quadrature

$$(35) \qquad -\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}\, dp = \frac{\mathrm{A}\, dp}{p-\alpha} + \frac{\mathrm{B}\, dp}{p-\beta} + \frac{\mathrm{C}\, dp}{p-\gamma} = \frac{\mathrm{A}\, dp'}{p'},$$

qui donne évidemment pour p' une valeur de la forme

$$p' = p'_0(p-\alpha) + p'_1(p-\alpha)^2 + \ldots$$

et pour $p-\alpha$ une série

$$p-\alpha = \frac{1}{p'_0}\, p' + \ldots.$$

Cette série sera convergente pour des valeurs suffisamment petites de p'; on peut, si l'on veut, remplacer p'_0 par l'unité. Avec cette nouvelle variable, l'équation de la courbe que nous avons étudiée dans les numéros précédents deviendra

$$u = \mathrm{M} p'^{\mathrm{A}}.$$

Quant à l'équation différentielle, il est évident qu'elle prendra la forme suivante

$$(36) \qquad p' \frac{du}{dp'} - \mathrm{A} u + \mathrm{H}'_1 \frac{du^2}{dp'^2} + \mathrm{K}'_1 u \frac{du}{dp'} + \mathrm{L}'_1 u^2 + \varphi = 0,$$

H'_1, K'_1, L'_1 étant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances de p' et φ étant du troisième ordre en u, $\frac{du}{dp'}$; cette fonction φ

contiendra, d'ailleurs, p'. Nous avons à étudier les solutions de cette équation pour lesquelles les trois variables u, $\frac{du}{dp'}$ et p' sont infiniment petites. Cela résulte évidemment des expressions de x et de y et de l'hypothèse ajoutée que p est voisin de α. Dans ces conditions les trois termes de degré moindre, dans l'équation précédente, sont évidemment les suivants

$$p'\frac{du}{dp'}, \quad -\mathrm{A}u, \quad \beta_0\frac{du^2}{dp'^2}, \tag{37}$$

β_0 étant le terme constant dans la série H'_1. Pour que l'équation soit vérifiée, il faut que deux au moins de ces termes soient du même degré, le troisième étant de degré supérieur ou égal.

11. Si les deux premiers termes sont seuls du même ordre, u est de l'ordre de p'^{A} et le troisième terme est de l'ordre de $p'^{2\mathrm{A}-2}$. Il faudra donc, pour que les deux premiers termes puissent être du même ordre, que la partie réelle de $\mathrm{A}-2$ soit positive.

Supposons cette condition remplie : l'application pure et simple des méthodes données par Briot et Bouquet dans le § IV de leurs *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier, p. 133) suffira à montrer qu'il y a une infinité de solutions de l'équation différentielle pour lesquelles u est de l'ordre de p'^{A} et qui ont pour expression approchée

$$u = \mathrm{C}_0 p'^{\mathrm{A}},$$

C_0 désignant une constante quelconque. On peut aussi raisonner comme il suit :

Effectuons la substitution

$$u = v p'^{\mathrm{A}}, \tag{38}$$

l'équation différentielle deviendra, après la suppression du facteur p'^{A},

$$\left\{\begin{aligned} &p'\frac{dv}{dp'} + \mathrm{H}'_1 p'^{\mathrm{A}-2}\left(p'\frac{dv}{dp'} + \mathrm{A}v\right)^2 + \mathrm{K}'_1 v p'^{\mathrm{A}-1}\left(p'\frac{dv}{dp'} + \mathrm{A}v\right) \\ &\qquad + \mathrm{L}'_1 v^2 p'^{\mathrm{A}} + p'^{2\mathrm{A}-3}\varphi\left(p', v, p'\frac{dv}{dp'}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Elle pourra être résolue par rapport à $p'\frac{dv}{dp'}$ et donnera une valeur

de la forme

$$p'\frac{dv}{dp'} = Mv^2 + Nv^3 + \ldots, \tag{40}$$

M, N étant des fonctions de p' dont tous les termes contiendront en facteur, soit p', soit p'^{A-2}. Cette équation, il est aisé de le reconnaître, admet des solutions v prenant une valeur arbitraire pour $p' = 0$ et développables suivant les puissances entières de p' et de p'^{A-2} (1).

---

(1) Considérons d'une manière plus générale une équation de la forme suivante

$$p\frac{dv}{dp} = f(v, p, p^{m_1}, \ldots, p^{m_k}),$$

où $m, m_1, \ldots, m_k$ sont des exposants à partie réelle positive et où f désigne une série dont tous les termes contiennent soit p, soit l'une des puissances p^{m_i} en facteur. Proposons-nous de chercher si cette équation admet une solution développable suivant les puissances de $p, p^{m_1}, p^{m_2}, \ldots, p^{m_k}$. On reconnaîtra d'abord que l'on peut choisir arbitrairement la valeur initiale de v et que tous les autres coefficients de la série se déterminent en fonction du premier. Posons, en effet,

$$p^{m_i} = p_i;$$

l'équation pourra s'écrire

$$p\frac{\partial v}{\partial p} + m_1 p_1 \frac{\partial v}{\partial p_1} + \ldots + m_k p_k \frac{\partial v}{\partial p_k} = f(v, p, p_1, \ldots, p_k).$$

En donnant à v une valeur arbitraire v_0 et en égalant les coefficients des produits $p^\alpha, p_1^{\alpha_1} \ldots, p_k^{\alpha_k}$, dans les deux membres, on pourra, de proche en proche, déterminer tous les coefficients de la série cherchée. Pour démontrer maintenant que cette série est convergente, remplaçons tous les coefficients de f par leurs modules, tous les exposants m_i dans le premier membre par leurs parties réelles positives, la valeur initiale v_0 par son module. Toutes ces substitutions ne pourront qu'augmenter les modules des coefficients dans la série qui doit représenter v. Il en sera de même encore si nous remplaçons ensuite f par le quotient

$$\frac{p\dfrac{\partial f}{\partial p} + m_1 p_1 \dfrac{\partial f}{\partial p_1} + \ldots + m_k p_k \dfrac{\partial f}{\partial p_k}}{1 - \dfrac{\partial f}{\partial v}}.$$

Or, après toutes ces substitutions, il nous reste une équation que nous pouvons intégrer à vue et dont l'intégrale est fournie par la formule

$$v = v_0 + f(v, p, p_1, \ldots, p_k),$$

où f est une série dont tous les termes contiennent l'une au moins des variables $p, p_1, \ldots, p_k$.

Le développement de v par la formule de Lagrange sera convergent tant que $p, p_1, \ldots, p_k$ seront suffisamment petits; et il donnera des limites supérieures des coefficients de la série obtenue pour v, série qui sera, par suite, aussi convergente.

12. Supposons maintenant que la partie réelle de $A-2$ soit négative. Alors les deux premiers termes (37) devront être du même ordre que le troisième, et l'on aura nécessairement

$$u = vp'^2, \tag{41}$$

v demeurant fini pour $p'=0$. En substituant dans l'équation (36), il vient un résultat de la forme suivante

$$p'\frac{dv}{dp'} + (2-A)v + \beta\left(2v + p'\frac{dv}{dp'}\right)^2 + p'\mathfrak{F}\left(p', v, p'\frac{dv}{dp'}\right) = 0. \tag{42}$$

Pour $p'=0$, on a, écartant le cas où β_0 serait nul,

$$v = \frac{A-2}{4\beta_0}.$$

Nous poserons donc

$$v = \frac{A-2}{4\beta_0} + w,$$

et nous obtiendrons pour w une équation de la forme

$$(A-2)w + (A-1)p'\frac{dw}{dp'} + 4\beta_0 w\left(w + p'\frac{dw}{dp'}\right) + p'\mathfrak{F}_1\left(p', w, p'\frac{\partial w}{\partial p'}\right) = 0.$$

On peut toujours résoudre cette équation par rapport à $p'\frac{dw}{dp'}$, ce qui donnera un résultat de la forme suivante :

$$p'\frac{dw}{dp'} = \frac{2-A}{A-1}w + \ldots, \tag{43}$$

les termes non écrits contenant tous en facteur, soit p', soit w^2.

Les équations de la forme précédente admettent toujours, comme on sait, tant que $\frac{2-A}{A-1}$ n'est pas un entier positif, une solution holomorphe

$$w = \varphi(p'), \tag{44}$$

se réduisant à zéro avec p'; mais elles peuvent admettre d'autres solutions s'annulant encore avec p' lorsque la partie réelle du quotient

$$\frac{2-A}{A-1}$$

est positive.

Posons

$$A = A' + iB';$$

la partie réelle de $\frac{2-A}{A-1}$ sera

$$\frac{(2-A')(A'-1)-B'^2}{(A'-1)^2+B'^2}.$$

Si l'on a

$$1<A'<2, \qquad B'^2<(2-A')(A'-1),$$

l'équation (43) admettra des solutions dont la partie principale sera donnée par la formule

$$w = C_0 p'^{\frac{2-A}{A-1}},$$

C_0 étant une constante quelconque, ce qui donnera pour u la valeur approchée

$$(45) \qquad u = \frac{A-2}{4\beta_0}p'^2 + C_0 p'^{\frac{A}{A-1}},$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à l'un ou l'autre de ceux que nous mettons en évidence.

La ligne de courbure passera à l'ombilic, mais elle n'y aura pas la même singularité que la courbe étudiée aux nos 5 et 6, et qui lui est homothétique dès qu'on s'éloigne de la région pour laquelle p' est voisin de zéro.

Si l'on a

$$1<A'<2, \qquad B'^2>(2-A')(A'-1),$$

alors la ligne de courbure ne passera pas à l'ombilic, bien que la courbe qui, partout ailleurs, lui est homothétique, y passe effectivement.

Enfin si l'on a

$$A'<1,$$

alors la ligne homothétique se comporte comme la ligne de courbure, en ce sens que ni l'une ni l'autre de ces courbes ne passent à l'ombilic.

Nous avons laissé de côté le cas exceptionnel où $\frac{2-A}{A-1}$ serait un entier positif. On sait qu'alors l'équation (43) admet une infinité d'intégrales s'évanouissant avec p'; et il résulte d'un théorème démontré par M. Poincaré dans une *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* insérée au XLVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* que toutes ces intégrales sont holomorphes en p' et $p' \operatorname{Log} p'$. Ici encore la ligne de courbure et la courbe homothétique passeront à l'ombilic sans y avoir la même singularité.

Lorsque l'exposant A est réel, on se trouve dans le cas étudié par M. Picard; les deux courbes passent, ou ne passent pas, en même temps à l'ombilic. Mais lorsqu'elles y passent, elles n'ont pas nécessairement un contact du même ordre avec leur tangente commune.

Toutes ces conclusions ne sont nullement contradictoires et s'expliquent aisément à l'aide de certains exemples particuliers. Si l'on prend, par exemple, les courbes définies par l'équation suivante :

$$u = C_0 p^2 \varphi(p) + C_0^2 p^\alpha \psi(p), \tag{46}$$

où C_0 désigne une constante arbitraire, $\varphi(p)$ et $\psi(p)$ étant des fonctions holomorphes de p, ne s'annulant pas avec p, on reconnaît immédiatement que, pour C_0 très petit, les courbes deviennent semblables à celle qui est représentée par l'équation

$$u = p^2 \varphi(p).$$

Néanmoins, lorsque p tend vers zéro, le second terme peut devenir prépondérant, ou même infini, suivant la valeur de α.

NOTE VIII.

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES ET SUR LES LIGNES DE COURBURE DE LA SURFACE DES ONDES DE FRESNEL.

1. Depuis Fresnel et Ampère, un très grand nombre de géomètres ont publié sur la surface de l'onde des travaux importants. Une monographie complète de cette surface mériterait d'être entreprise. Mais il ne faut pas se dissimuler qu'elle serait fort étendue, car elle aurait à faire des emprunts à bien des théories différentes, soit en Analyse, soit en Géométrie. Dans cette courte Note, nous nous proposons seulement de former et d'étudier les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure, en considérant la surface de l'onde comme l'*apsidale* d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Nous avons vu au Livre VIII, Chapitre VIII, comment on peut rattacher certaines transformations de contact à la considération de deux équations, les équations (17) de la page 172, entre les coordonnées x, y, z; X, Y, Z de deux points correspondants m, M. Si l'on prend, pour ces équations, les deux suivantes

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2-X^2-Y^2-Z^2=0, \\ Xx+Yy+Zz=0, \end{cases}$$

où les coordonnées des deux points entrent symétriquement, il faudra leur adjoindre, d'après la théorie que nous avons développée, les quatre relations

$$(2) \quad \begin{cases} x+pz-\lambda(X+pZ)=0, \\ y+qz-\lambda(Y+qZ)=0, \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} X+PZ+\lambda(x+Pz)=0, \\ Y+QZ+\lambda(y+Qz)=0, \end{cases}$$

qui dérivent des équations (21) et (22) données à la page 174 et où P, Q, p, q ont la signification déjà indiquée. Ces équations nouvelles, jointes aux précédentes (1), définiront complètement la transformation

à laquelle on a donné le nom de *transformation apsidale*. Pour connaître les propriétés de cette transformation, il suffit de les interpréter géométriquement.

Soit toujours (s) la surface décrite par le point m et (S) la surface correspondante décrite par le point M. Les équations (2) expriment que la normale à (s) admet pour paramètres directeurs

$$x-\lambda X,\quad y-\lambda Y,\quad z-\lambda Z;$$

et les équations (3) expriment de même que les paramètres directeurs de la normale à (S) sont

$$X+\lambda x,\quad Y+\lambda y,\quad Z+\lambda z.$$

De ces remarques si simples, on déduit immédiatement les propriétés suivantes, bien connues, de la transformation apsidale.

Les deux rayons vecteurs, égaux et rectangulaires, OM, Om, *qui joignent l'origine aux points correspondants, les deux normales en* M *et en m sont quatre droites dans un même plan.*

Les normales en M *et en m sont perpendiculaires.*

2. Admettant toutes ces propriétés qui définissent évidemment la transformation, nous allons indiquer des formules simples permettant de passer d'une surface à sa transformée.

x, y, z désignant des coordonnées d'un point quelconque m d'une surface (s), écrivons l'équation du plan tangent sous la forme

$$pX+qY+rZ=1; \tag{4}$$

p, q, r seront des coordonnées tangentielles, vérifiant les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} px+qy+rz&=1,\\ p\,dx+q\,dy+r\,dz&=0.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Si maintenant on introduit trois quantités nouvelles p', q', r' par les relations

$$\left\{\begin{aligned} qz-ry+p'&=0,\\ rx-pz+q'&=0,\\ py-qx+r'&=0,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

p, q, r, p', q', r' seront les six coordonnées de la normale (n° **139**).

Ainsi les neuf quantités x, y, z; p, q, r; p', q', r' déterminent le point, le plan tangent et la normale. *La surface décrite par le*

point (p, q, r) est la polaire réciproque de la proposée par rapport à la sphère concentrique à l'origine et de rayon égal à l'unité. L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz = 0, \tag{7}$$

et celle des lignes de courbure (n° 139)

$$dp\,dp' + dq\,dq' + dr\,dr' = 0 \tag{8}$$

Désignons par des capitales les quantités analogues aux précédentes et relatives à la surface transformée (S). Aux équations (1), on devra joindre les suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} px + qy + rz = 1, & PX + QY + RZ = 1, \\ Xp' + Yq' + Zr' = 0, & Pp' + Qq' + Rr' = 0, \\ Pp + Qq + Rr = 0, & P'p + Q'q + R'r = 0, \end{array}\right. \tag{9}$$

d'où l'on déduira les valeurs suivantes

$$\left\{\begin{array}{lll} P = \dfrac{qr' - rq'}{\sqrt{G}}, & X = \dfrac{r'y - q'z}{\sqrt{G}}, & P' = p', \\ Q = \dfrac{rp' - pr'}{\sqrt{G}}, & Y = \dfrac{p'z - r'x}{\sqrt{G}}, & Q' = q', \\ R = \dfrac{pq' - qp'}{\sqrt{G}}, & Z = \dfrac{q'x - p'y}{\sqrt{G}}, & R' = r', \end{array}\right. \tag{10}$$

G étant défini par l'équation

$$G = p'^2 + q'^2 + r'^2 = P'^2 + Q'^2 + R'^2. \tag{11}$$

Les formules précédentes conduisent aux deux relations

$$\left\{\begin{array}{l} Pp + Qq + Rr = 0, \\ P^2 + Q^2 + R^2 = p^2 + q^2 + r^2, \end{array}\right. \tag{12}$$

qui, comparées aux formules (1), mettent en évidence une propriété bien connue de la transformation apsidale : *Quand deux surfaces se correspondent dans cette transformation, il en est de même de leurs polaires réciproques par rapport à toute sphère ayant son centre au pôle de la transformation.*

3. Appliquons ces propriétés générales au cas où la surface (s) est un ellipsoïde (E) défini par l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1. \tag{13}$$

On aura ici

$$(14)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{x}{a}, & q = \dfrac{y}{b}, & r = \dfrac{z}{c}; \\ p' = (b-c)qr, & q' = (c-a)pr, & r' = (a-b)pq. \end{cases}$$

Prenons comme coordonnées curvilignes β et α le carré du rayon Om et le carré de la distance du centre au plan tangent en m; c'est-à-dire posons

$$(15)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \beta, \\ p^2 + q^2 + r^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{1}{\alpha}. \end{cases}$$

D'après les propriétés de la transformation apsidale, ces variables α et β conserveront la même signification, quand on passera de m au point correspondant M; mais elles ont l'inconvénient de ne pas conduire à des expressions simples de x, y, z. En résolvant, par exemple, les équations (13) et (15), on est conduit, pour les coordonnées x, y, z, à des expressions telles que la suivante

$$x^2 = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\left(\frac{bc}{\alpha} - b - c + \beta\right).$$

Pour éviter cette difficulté, nous introduirons deux nouvelles variables α' et β', dont nous verrons plus loin la signification géométrique, et qui sont liées aux précédentes par des relations que l'on peut comprendre dans l'identité suivante :

L'équation

$$(16)\qquad \xi(\xi-\beta)(\xi-\beta') - f(\xi) = \mathrm{M}(\xi-\alpha)(\xi-\alpha'),$$

où M *est indépendant de* ξ, *et où* $f(\xi)$ *est le polynôme suivant du troisième degré*

$$(17)\qquad f(\xi) = (\xi-a)(\xi-b)(\xi-c),$$

doit avoir lieu pour toutes les valeurs de ξ.

Si l'on pose, en effet, pour abréger,

$$(18)\qquad a+b+c = h, \qquad ab+ac+bc = k, \qquad abc = l,$$

l'identité (16) équivaut aux relations

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}\alpha\alpha' = l, \\ \mathrm{M}(\alpha+\alpha') = k - \beta\beta', \\ \mathrm{M} = h - \beta - \beta'. \end{cases}$$

qui déterminent M, α', β' en fonction de α et de β. On peut d'ailleurs faire le calcul en se servant de l'identité même. Si l'on y remplace ξ par α, on aura, pour déterminer β', l'équation

$$\alpha - \beta' = \frac{f(\alpha)}{\alpha(\alpha - \beta)}. \tag{20}$$

Puis les équations (19) donneront

$$\mathrm{M} = h - \beta - \beta', \qquad \alpha' = \frac{l}{\mathrm{M}\alpha}. \tag{21}$$

Nous emploierons simultanément, dans la suite, les quatre variables α, β, α', β', en revenant, toutes les fois qu'il sera nécessaire, aux relations précédentes ou à l'identité (16) qui les contient toutes les trois. En particulier, nous nous servirons souvent des relations suivantes

$$(22)\ \begin{cases} \alpha(\alpha - \beta)(\alpha - \beta') = f(\alpha), \\ \alpha'(\alpha' - \beta)(\alpha' - \beta') = f(\alpha'), \end{cases} \qquad (23)\ \begin{cases} f(\beta) = -\mathrm{M}(\beta - \alpha)(\beta - \alpha'), \\ f(\beta') = -\mathrm{M}(\beta' - \alpha)(\beta' - \alpha'), \end{cases}$$

obtenues en remplaçant ξ successivement par $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, et de celles-ci

$$\begin{cases} a(a - \beta)(a - \beta') = \mathrm{M}(a - \alpha)(a - \alpha'), \\ b(b - \beta)(b - \beta') = \mathrm{M}(b - \alpha)(b - \alpha'), \\ c(c - \beta)(c - \beta') = \mathrm{M}(c - \alpha)(c - \alpha'), \end{cases} \tag{24}$$

obtenues de même en remplaçant ξ par a, b, c.

4. En tenant compte de toutes ces relations, on trouvera facilement pour $p, q, r, x, y, z, p', q', r'$ les expressions suivantes *sous formes de produits*

$$\begin{cases} p = \dfrac{x}{a} = \sqrt{\dfrac{(\beta - \alpha)(\beta' - a)}{(\alpha - a)f'(a)}} = \sqrt{\dfrac{l(a - \alpha')(\beta - \alpha)}{a\alpha\alpha'(a - \beta)f'(a)}}, \\ q = \dfrac{y}{b} = \sqrt{\dfrac{(\beta - \alpha)(\beta' - b)}{(\alpha - b)f'(b)}} = \sqrt{\dfrac{l(b - \alpha')(\beta - \alpha)}{b\alpha\alpha'(b - \beta)f'(b)}}, \\ r = \dfrac{z}{c} = \sqrt{\dfrac{(\beta - \alpha)(\beta' - c)}{(\alpha - c)f'(c)}} = \sqrt{\dfrac{l(c - \alpha')(\beta - \alpha)}{c\alpha\alpha'(c - \beta)f'(c)}}, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} p' = \mathrm{K}\sqrt{\dfrac{a - \alpha}{(a - \beta')f'(a)}}, \\ q' = \mathrm{K}\sqrt{\dfrac{b - \alpha}{(b - \beta')f'(b)}}, \\ r' = \mathrm{K}\sqrt{\dfrac{c - \alpha}{(c - \beta')f'(c)}}, \end{cases} \tag{26}$$

K ayant pour valeur

$$(27)\qquad K=(\beta-\alpha)\sqrt{\frac{-f(\beta')}{f(\alpha)}}=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{l}{\alpha'}(\beta-\alpha)(\beta'-\alpha')}.$$

Portant ces valeurs de p, q, r, p', q', r' dans les formules fondamentales (10) et remarquant que l'on a ici

$$(28)\qquad G=p'^2+q'^2+r'^2=\frac{\beta-\alpha}{\alpha},$$

on trouve, pour les éléments X, Y, Z, P, Q, R relatifs à la surface des ondes, les valeurs suivantes

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} X&=\frac{p(a-\beta)}{\sqrt{G}}=\sqrt{\frac{l(a-\beta)(a-\alpha')}{a\alpha' f'(a)}},\\ Y&=\frac{q(b-\beta)}{\sqrt{G}}=\sqrt{\frac{l(b-\beta)(b-\alpha')}{b\alpha' f'(b)}},\\ Z&=\frac{r(c-\beta)}{\sqrt{G}}=\sqrt{\frac{l(c-\beta)(c-\alpha')}{c\alpha' f'(c)}},\end{aligned}\right.$$

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} P&=\frac{p(a-\alpha)}{\alpha\sqrt{G}}=\sqrt{\frac{(\beta'-a)(\alpha-a)}{\alpha f'(a)}},\\ Q&=\frac{q(b-\alpha)}{\alpha\sqrt{G}}=\sqrt{\frac{(\beta'-b)(\alpha-b)}{\alpha f'(b)}},\\ R&=\frac{r(c-\alpha)}{\alpha\sqrt{G}}=\sqrt{\frac{(\beta'-c)(\alpha-c)}{\alpha f'(c)}},\end{aligned}\right.$$

P', Q', R' étant, nous l'avons vu, respectivement égaux, dans tous les cas, à p', q', r'.

5. Des formules précédentes, on déduit un grand nombre de relations, parmi lesquelles nous signalerons les suivantes

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &X^2+Y^2+Z^2=\beta, &&\frac{X^2}{\beta-a}+\frac{Y^2}{\beta-b}+\frac{Z^2}{\beta-c}=1,\\ &\frac{aX^2}{a-\beta}+\frac{bY^2}{b-\beta}+\frac{cZ^2}{c-\beta}=0, &&\frac{aX^2}{a-\alpha'}+\frac{bY^2}{b-\alpha'}+\frac{cZ^2}{c-\alpha'}=0,\end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &P^2+Q^2+R^2=\frac{1}{\alpha}, &&\frac{P^2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a}}+\frac{Q^2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{b}}+\frac{R^2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{c}}=1,\\ &\frac{P^2}{a-\beta'}+\frac{Q^2}{b-\beta'}+\frac{R^2}{c-\gamma'}=0, &&\frac{P^2}{a-\alpha}+\frac{Q^2}{b-\alpha}+\frac{R^2}{c-\alpha}=0.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de β entre les deux équations de la première ligne (31) donnerait, par exemple, l'équation de la surface. L'analogie des deux autres équations (31) montre immédiatement la signification géométrique de α'. Le rayon OM prolongé ira couper la surface en un second point M', et l'on aura

$$(33) \qquad \text{OM}' = \sqrt{\alpha'}, \qquad \text{comme} \qquad \text{OM} = \sqrt{\beta}.$$

Ainsi β et α' sont les carrés des deux rayons vecteurs dirigés suivant le diamètre OM.

Les équations (32) se déduisent des précédentes si l'on remplace

$$\text{X}, \quad \text{Y}, \quad \text{Z}, \quad a, \quad b, \quad c, \quad \beta, \quad \alpha',$$

respectivement par

$$\text{P}, \quad \text{Q}, \quad \text{R}, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\beta'}.$$

La surface décrite par le point (P, Q, R) est donc la surface des ondes relative à l'ellipsoïde (E')

$$(34) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1.$$

Comme cet ellipsoïde (E') est polaire réciproque de l'ellipsoïde (E) relativement à la sphère de rayon 1 ayant l'origine pour centre, le résultat précédent est simplement la conséquence de la proposition générale indiquée plus haut relativement à l'apsidale de la polaire réciproque.

On voit ainsi que, si l'on mène à la première surface des ondes un plan tangent parallèle au plan tangent en M, la distance de l'origine à ce plan tangent sera $\sqrt{\beta'}$.

Ainsi $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta'}$ *sont les distances à deux plans tangents parallèles.* Les deux remarques que nous venons d'indiquer rattachent ainsi *géométriquement* les variables introduites α', β' aux variables primitives α et β.

6. Ces points étant établis, nous allons former en premier lieu l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface des ondes

$$(35) \qquad d\text{P}\, d\text{X} + d\text{Q}\, d\text{Y} + d\text{R}\, d\text{Z} = 0.$$

Pour effectuer le calcul avec simplicité, nous ferons usage des formules telles que la suivante

$$(36) \qquad \text{PX} = \frac{(a-\beta)(a-\beta')}{f'(a)} = \frac{\text{M}(a-\alpha)(a-\alpha')}{a f'(a)},$$

que le lecteur établira sans difficulté. Comme on peut écrire l'équation (35) sous la forme

$$\mathbf{S}\,\mathrm{PX}\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}}\,\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{X}} = 0,$$

on aura, en employant les formules (29) et (30), l'équation différentielle

$$\mathbf{S}\,\mathrm{PX}\left[\frac{d\beta}{a-\beta}+\frac{a\,d\alpha'}{\alpha'(a-\alpha')}\right]\left[\frac{d\beta'}{a-\beta'}+\frac{a\,d\alpha}{\alpha(a-\alpha)}\right] = 0.$$

En utilisant successivement les deux expressions différentes (36) de PX, on obtiendra le résultat suivant

$$\frac{\alpha-\beta'}{f(\alpha)}\,d\alpha\,d\beta+\frac{\alpha'-\beta}{f(\alpha')}\,d\alpha'\,d\beta' = 0. \tag{37}$$

Les deux relations (22) permettent encore d'éliminer $f(\alpha)$, $f(\alpha')$ et de ramener l'équation précédente à la forme

$$\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha(\alpha-\beta)} = -\,\frac{d\alpha'\,d\beta'}{\alpha'(\alpha'-\beta')}. \tag{38}$$

Mais cette équation différentielle contient toujours quatre variables α, β, α', β'. Nous allons voir comment on peut éliminer deux d'entre elles.

D'après l'identité (16), α et α' sont racines de l'équation du second degré en t

$$t(t-\beta)(t-\beta')-f(t) = 0.$$

Différentions totalement cette équation. En désignant son premier membre par $\varphi(t)$, nous aurons pour chacune de ses deux racines

$$\varphi'(t)\,dt = t(t-\beta')\,d\beta + t(t-\beta)\,d\beta',$$

ce qui nous donnera, en remplaçant successivement t par α et par α',

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'(\alpha)\,d\alpha &= \alpha(\alpha-\beta')\,d\beta + \alpha(\alpha-\beta)\,d\beta',\\ \varphi'(\alpha')\,d\alpha' &= \alpha'(\alpha'-\beta')\,d\beta + \alpha'(\alpha'-\beta)\,d\beta'. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

On a d'ailleurs

$$\varphi(t) = \frac{l}{\alpha\alpha'}(t-\alpha)(t-\alpha') \tag{40}$$

et par suite

$$\varphi'(\alpha) = -\,\varphi'(\alpha') = l\left(\frac{1}{\alpha'}-\frac{1}{\alpha}\right). \tag{41}$$

En divisant donc membre à membre les deux équations (39), on aura

$$\frac{d\alpha}{d\alpha'} = -\frac{\alpha(\alpha-\beta')\,d\beta + \alpha(\alpha-\beta)\,d\beta'}{\alpha'(\alpha'-\beta')\,d\beta + \alpha'(\alpha'-\beta)\,d\beta'},$$

ce qui établit une relation homographique entre les deux coefficients différentiels $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$, $\frac{d\beta}{d\beta'}$. En chassant les dénominateurs on trouve

$$\begin{aligned}&\alpha'(\alpha'-\beta')\,d\alpha\,d\beta + \alpha(\alpha-\beta)\,d\alpha'\,d\beta'\\ &\quad+\alpha'(\alpha'-\beta)\,d\alpha\,d\beta' + \alpha(\alpha-\beta')\,d\alpha'\,d\beta = 0.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes ayant une somme nulle pour les lignes asymptotiques, en vertu de l'équation (38), on voit que cette équation est encore équivalente à la suivante

$$\frac{d\alpha\,d\beta'}{\alpha(\alpha-\beta')} = -\frac{d\alpha'\,d\beta}{\alpha'(\alpha'-\beta)}. \tag{42}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier ou à diviser membre à membre les deux équations (38) et (42) pour obtenir les deux suivantes

$$\begin{gathered}\frac{d\alpha^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)(\alpha-\beta')} = \frac{d\alpha'^2}{\alpha'^2(\alpha'-\beta)(\alpha'-\beta')},\\ \frac{d\beta^2}{(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta)} = \frac{d\beta'^2}{(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta')},\end{gathered}$$

qui, en tenant compte des identités (22) et (23), se ramènent aux suivantes

$$\frac{d\alpha^2}{\alpha\,f(\alpha)} = \frac{d\alpha'^2}{\alpha'\,f(\alpha')}; \tag{43}$$

$$\frac{d\beta^2}{f(\beta)} = \frac{d\beta'^2}{f(\beta')}, \tag{44}$$

où les variables sont séparées. On reconnaît dans l'une et dans l'autre l'équation d'Euler dont l'intégrale peut revêtir tant de formes différentes.

Ainsi, les lignes asymptotiques de la surface des ondes sont des courbes algébriques. Cet important résultat est dû à M. Lie, qui l'a signalé d'abord dans sa Note *Sur une transformation géométrique*, présentée en 1870 à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. LXXI, p. 579). M. Lie l'a établi pour la surface de Kummer, qui comprend la surface des ondes comme cas particulier. Les lignes asymptotiques de cette surface ont été étudiées par MM. Klein et Lie dans une Note : *Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'-*

schen Fläche vierten Grades mit 16 *Knotenpunkten,* insérée en 1870, p. 891-899, aux *Monatsberichte* de Berlin.

7. Avant d'étudier l'intégrale de l'équation précédente, nous allons étendre un peu les résultats obtenus. Conservons toujours les quatre variables α, β, α', β' liées par les identités (22) à (24) et cherchons s'il existe des surfaces pour lesquelles les six variables X, Y, Z, P, Q, R soient exprimées par les formules suivantes

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} X &= CA(a-\alpha)^m(a-\alpha')^{m'}(a-\beta)^n(a-\beta')^{n'},\\ Y &= C_1A(b-\alpha)^m(b-\alpha')^{m'}(b-\beta)^n(b-\beta')^{n'},\\ Z &= C_2A(c-\alpha)^m(c-\alpha')^{m'}(c-\beta)^n(c-\beta')^{n'}, \end{aligned}\right.$$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{1}{CA\,f'(a)}(a-\alpha)^{-m}(a-\alpha')^{-m'}(a-\beta)^{1-n}(a-\beta')^{1-n'},\\ Q &= \frac{1}{C_1A\,f'(b)}(b-\alpha)^{-m}(b-\alpha')^{-m'}(b-\beta)^{1-n}(b-\beta')^{1-n'},\\ R &= \frac{1}{C_2A\,f'(c)}(c-\alpha)^{-m}(c-\alpha')^{-m'}(c-\beta)^{1-n}(c-\beta')^{1-n'}, \end{aligned}\right.$$

où A désigne une fonction arbitraire de deux des variables α, β, α', β'; C, C_1, C_2, m, n, m', n' des constantes quelconques; ces formules comprennent comme cas particulier celles qui sont relatives à la surface des ondes. Il sera nécessaire et suffisant que les valeurs précédentes vérifient identiquement les deux relations

$$\begin{gathered} PX + QY + RZ = 1,\\ P\,dX + Q\,dY + R\,dZ = 0. \end{gathered}$$

La première résulte immédiatement des formules

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} PX &= \frac{(a-\beta)(a-\beta')}{f'(a)},\\ QY &= \frac{(b-\beta)(b-\beta')}{f'(b)},\\ RZ &= \frac{(c-\beta)(c-\beta')}{f'(c)}, \end{aligned}\right.$$

conséquences des équations (45) et (46).

Quant à la seconde, elle nous donne, par un calcul facile, la condition suivante

$$\frac{dA}{A} + m\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\beta')}{f(\alpha)}d\alpha + m'\frac{(\alpha'-\beta)(\alpha'-\beta')}{f(\alpha')}d\alpha' = 0,$$

ou, en tenant compte des identités (22),

$$\frac{dA}{A} + m\frac{d\alpha}{\alpha} + m'\frac{d\alpha'}{\alpha'} = 0.$$

On peut donc prendre

$$A = \alpha^{-m}\alpha'^{-m'};$$

et il vient, pour la surface cherchée, les formules définitives

$$(48)\quad \begin{cases} X = C\left(\dfrac{a-\alpha}{\alpha}\right)^m \left(\dfrac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m'} (a-\beta)^n(a-\beta')^{n'}, \\ Y = C_1\left(\dfrac{b-\alpha}{\alpha}\right)^m \left(\dfrac{b-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m'} (b-\beta)^n(b-\beta')^{n'}, \\ Z = C_2\left(\dfrac{c-\alpha}{\alpha}\right)^m \left(\dfrac{c-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m'} (c-\beta)^n(c-\beta')^{n'}; \end{cases}$$

$$(49)\quad \begin{cases} P = \dfrac{1}{C f'(a)}\left(\dfrac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{-m} \left(\dfrac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{-m'} (a-\beta)^{1-n}(a-\beta')^{1-n'}, \\ Q = \dfrac{1}{C_1 f'(b)}\left(\dfrac{b-\alpha}{\alpha}\right)^{-m} \left(\dfrac{b-\alpha'}{\alpha'}\right)^{-m'} (b-\beta)^{1-n}(b-\beta')^{1-n'}, \\ R = \dfrac{1}{C_2 f'(c)}\left(\dfrac{c-\alpha}{\alpha}\right)^{-m} \left(\dfrac{c-\alpha'}{\alpha'}\right)^{-m'} (c-\beta)^{1-n}(c-\beta')^{1-n'}. \end{cases}$$

On retrouverait en particulier la surface des ondes en faisant

$$(50)\quad \begin{cases} m = 0, \qquad m' = \dfrac{1}{2}, \qquad n = \dfrac{1}{2}, \qquad n' = 0; \\ C = \dfrac{\sqrt{l}}{\sqrt{a f'(a)}}, \qquad C_1 = \dfrac{\sqrt{l}}{\sqrt{b f'(b)}}, \qquad C_2 = \dfrac{\sqrt{l}}{\sqrt{c f'(c)}}. \end{cases}$$

Appliquons à ces formules plus générales (48) et (49) la méthode qui nous a réussi dans le cas de la surface des ondes et formons l'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\sum \frac{(a-\beta)(a-\beta')}{f'(a)}\left[\frac{n\,d\beta}{\beta-a} + \frac{n'\,d\beta'}{\beta'-a} + \frac{ma\,d\alpha}{\alpha(\alpha-a)} + \frac{m'a\,d\alpha'}{\alpha'(\alpha'-a)}\right]$$
$$\left[\frac{(1-n)\,d\beta}{\beta-a} + \frac{(1-n')\,d\beta'}{\beta'-a} - \frac{ma\,d\alpha}{\alpha(\alpha-a)} - \frac{m'a\,d\alpha'}{\alpha'(\alpha'-a)}\right] = 0.$$

Effectuons les sommations en remplaçant, dans tous les termes où se trouvent les seules différentielles $d\alpha$, $d\alpha'$, le produit $(a-\beta)(a-\beta')$ par la quantité égale

$$\frac{l(a-\alpha)(a-\alpha')}{a\alpha\alpha'}.$$

Nous aurons l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
&-n(1-n)(\beta-\beta')\frac{d\beta^2}{f(\beta)}-n'(1-n')(\beta'-\beta)\frac{d\beta'^2}{f(\beta')}\\
&+m(2n-1)\frac{d\alpha\, d\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}+m(2n'-1)\frac{d\alpha\, d\beta'}{\alpha(\alpha-\beta')}\\
&+m'(2n-1)\frac{d\alpha'\, d\beta}{\alpha'(\alpha'-\beta)}+m'(2n'-1)\frac{d\alpha'\, d\beta'}{\alpha'(\alpha'-\beta')}\\
&\qquad+\frac{lm^2}{\alpha^2\alpha'}(\alpha-\alpha')\frac{d\alpha^2}{f(\alpha)}+\frac{lm'^2}{\alpha\alpha'^2}(\alpha'-\alpha)\frac{d\alpha'^2}{f(\alpha')}=0.
\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant $d\alpha$, $d\alpha'$ par leurs valeurs déduites des équations (39) où l'on remplacera $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\alpha')$ par leurs expressions (41). Après les réductions, le terme en $d\beta\, d\beta'$ contiendra un coefficient numérique, qui sera

$$2(m-m')(m+m'+n+n'-1).$$

Si l'on veut que l'équation différentielle ait encore ses variables séparées, le coefficient précédent devra être nul. Écartant l'hypothèse $m=m'$ qui conduirait à des surfaces déjà étudiées au n° **112** [I, p. 142], nous supposerons

$$m+m'+n+n'=1. \tag{51}$$

Alors l'équation différentielle se réduira encore, après la suppression du facteur

$$\frac{(m+n)(m'+n')(\alpha-\beta')(\alpha'-\beta)+(m+n')(m'+n)(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta')}{\alpha-\alpha'},$$

à la forme simple

$$\frac{d\beta^2}{f(\beta)}-\frac{d\beta'^2}{f(\beta')}=0, \tag{52}$$

identique à celle que nous avons obtenue dans le cas de la surface des ondes, pour laquelle d'ailleurs la relation (51) se trouve vérifiée par les valeurs correspondantes de m, n, m', n'. Ainsi nous obtenons une classe de surfaces se rattachant à la surface des ondes et dont les lignes asymptotiques se déterminent toutes par l'intégration de l'équation d'Euler. Ces surfaces seront algébriques, ainsi que leurs lignes asymptotiques, toutes les fois que les exposants m, n, m', n' seront commensurables.

8. Parmi les différents procédés d'intégration de l'équation d'Euler, voici, ce nous semble, celui qui convient le mieux à notre sujet.

θ_1, θ_2, θ_3 désignant des fonctions de deux variables, considérons la famille de courbes définie par l'équation

$$(53)\qquad \theta_1\sqrt{c_1}+\theta_2\sqrt{c_2}+\theta_3\sqrt{c_3}=0,$$

où c_1, c_2, c_3 désignent trois constantes dont la somme est nulle

$$(54)\qquad c_1+c_2+c_3=0.$$

L'équation différentielle de cette famille de courbes se forme sans difficulté, car on a

$$d\theta_1\sqrt{c_1}+d\theta_2\sqrt{c_2}+d\theta_3\sqrt{c_3}=0,$$

ce qui donne

$$\frac{\sqrt{c_1}}{\theta_2\,d\theta_3-\theta_3\,d\theta_2}=\frac{\sqrt{c_2}}{\theta_3\,d\theta_1-\theta_1\,d\theta_3}=\frac{\sqrt{c_3}}{\theta_1\,d\theta_2-\theta_2\,d\theta_1},$$

et par suite

$$(55)\qquad (\theta_2\,d\theta_3-\theta_3\,d\theta_2)^2+(\theta_3\,d\theta_1-\theta_1\,d\theta_3)^2+(\theta_1\,d\theta_2-\theta_2\,d\theta_1)^2=0,$$

ou encore

$$(55)'\qquad (\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2)(d\theta_1^2+d\theta_2^2+d\theta_3^2)-(\theta_1\,d\theta_1+\theta_2\,d\theta_2+\theta_3\,d\theta_3)^2=0.$$

Si l'on suppose que l'on ait

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=1,$$

l'équation différentielle prendra la forme encore plus simple

$$(56)\qquad d\theta_1^2+d\theta_2^2+d\theta_3^2=0;$$

et si l'on pose

$$(57)\qquad \begin{cases} \theta_1=\sqrt{\dfrac{(a-\beta)(a-\beta')}{f'(a)}}, \\ \theta_2=\sqrt{\dfrac{(b-\beta)(b-\beta')}{f'(b)}}, \\ \theta_3=\sqrt{\dfrac{(c-\beta)(c-\beta')}{f'(c)}}, \end{cases}$$

elle deviendra

$$(58)\qquad \frac{d\beta^2}{f(\beta)}=\frac{d\beta'^2}{f(\beta')}.$$

C'est précisément l'équation que nous avons rencontrée, et dont l'in-

tégrale pourra par suite se mettre sous la forme

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\mathrm{PX}}\sqrt{(a-k)(b-c)} \\ &\quad + \sqrt{\mathrm{QY}}\sqrt{(b-k)(c-a)} + \sqrt{\mathrm{RZ}}\sqrt{(c-k)(a-b)} = 0, \end{aligned} \right.$$

où k désigne une constante arbitraire quelconque et où nous avons tenu compte des formules (47) données plus haut.

9. L'interprétation géométrique de l'équation (59) est facile à donner si l'on introduit le complexe auquel appartiennent toutes les normales d'une famille d'ellipsoïdes homofocaux, et qui est formé par toutes les droites qui coupent les trois plans de symétrie et le plan de l'infini en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Nous appellerons un tel complexe *un complexe de Chasles.* Et alors on pourra traduire sous la forme géométrique suivante le résultat que nous venons d'obtenir :

En tous les points de chaque ligne asymptotique de la surface, le plan tangent à la surface est tangent au cône d'un complexe de Chasles dont le tétraèdre fondamental est formé par les plans de symétrie et le plan de l'infini.

Si l'on veut, par exemple, obtenir les deux lignes asymptotiques qui passent en un point de la surface, on construira les deux cônes du second ordre ayant leur sommet en ce point, passant par les quatre sommets du tétraèdre fondamental et tangents au plan tangent de la surface en ce point. *A chacun de ces cônes correspondront un complexe de Chasles et une des deux lignes asymptotiques cherchées.*

10. Il est naturel de se demander si la construction précédente s'applique à d'autres surfaces. En revenant aux notations de Monge et désignant maintenant par p et q les dérivées de z considérée comme fonction de x et y, le problème peut évidemment se formuler comme il suit :

Chercher les surfaces pour lesquelles l'équation

$$(60)\qquad \sqrt{\alpha z} + \sqrt{-\beta p x} + \sqrt{-\gamma q y} = 0,$$

où les constantes α, β, γ satisfont à la relation

$$(61)\qquad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

Nous avons vu plus haut, au n° 8, comment on élimine les constantes α, β, γ. On est ainsi conduit à l'équation différentielle

$$(62) \quad \left[\frac{dz^2}{z} - \frac{(dpx)^2}{px} - \frac{(dqy)^2}{qy}\right](z - px - qy) = [d(z - px - qy)]^2.$$

Or, pour une ligne asymptotique, on a

$$(63) \quad \begin{cases} dp\,dx + dq\,dy = 0, \\ dp^2 = (s^2 - rt)dy^2, \quad dq^2 = (s^2 - rt)dx^2, \quad dp\,dq = -(s^2 - rt)dx\,dy, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(64) \quad [d(z - px - qy)]^2 = (s^2 - rt)(x\,dy - y\,dx)^2.$$

Tenant compte de ces diverses relations, on mettra l'équation différentielle (62) sous la forme suivante

$$(65) \quad \begin{cases} [(s^2 - rt)xyz + pq(z - px - qy)] \\ \quad \times \left[(z - px)\frac{y}{q}dx^2 + (z - qy)\frac{x}{p}dy^2 - 2xy\,dx\,dy\right] = 0. \end{cases}$$

On a ici le choix entre deux hypothèses bien distinctes. Si le premier facteur n'est pas nul, le second devra être identique au polynôme

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

ce qui donnera les deux relations

$$\frac{y(z - px)}{qr} = \frac{x(z - qy)}{pt} = \frac{-xy}{s},$$

qui s'intègrent à vue et nous donnent

$$(66) \quad z - px - qy = \frac{q}{Y'} = \frac{p}{X'},$$

X et Y désignant des fonctions de x et de y respectivement. Ces deux équations du premier ordre s'intègrent à leur tour et conduisent, le lecteur le reconnaîtra aisément, *aux surfaces tétraédrales de Lamé* (n° 112) *et à leurs limites.*

11. Mais on peut satisfaire d'une autre manière à l'équation (65). Il suffit que le premier facteur soit nul. On est alors conduit à l'équa-

tion aux dérivées partielles

$$(s^2-rt)\,xyz+pq\,(z-px-qy)=0, \tag{67}$$

qui fera connaître une classe très étendue de surfaces jouissant de la propriété annoncée.

Cette équation, dont les caractéristiques sont les lignes asymptotiques de la surface cherchée, peut s'intégrer complètement et d'une manière élégante. Nous nous contenterons de l'interpréter géométriquement.

Soient α_0, β_0, γ_0 les cosinus directeurs de la normale, définis par les relations

$$\frac{\cos\alpha_0}{p}=\frac{\cos\beta_0}{q}=\frac{\cos\gamma_0}{-1}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{68}$$

Les coordonnées X, Y, Z d'un point situé à une distance N du pied de la normale seront données par les formules

$$X-x=\mathrm{N}\cos\alpha_0,\qquad Y-y=\mathrm{N}\cos\beta_0,\qquad Z-z=\mathrm{N}\cos\gamma_0, \tag{69}$$

d'où l'on déduit que si N_x, N_y, N_z, ϖ désignent les segments de la normale limités aux trois plans coordonnés et à la projection de l'origine sur la normale, on aura

$$\left\{\begin{aligned}&N_x=\frac{-x}{\cos\alpha_0},\qquad N_y=\frac{-y}{\cos\beta_0},\qquad N_z=\frac{-z}{\cos\gamma_0},\\&\varpi=-x\cos\alpha_0-y\cos\beta_0-z\cos\gamma_0;\end{aligned}\right. \tag{70}$$

ϖ désigne encore, *avec un signe déterminé,* la distance de l'origine au plan tangent.

On a, d'autre part, ρ' et ρ'' désignant les rayons de courbure principaux,

$$\rho'\rho''=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2}. \tag{71}$$

En tenant compte de toutes ces relations, on reconnaît que l'équation (67) peut être remplacée par la relation géométrique

$$\varpi\rho'\rho''=N_xN_yN_z, \tag{72}$$

qui est, par suite, vérifiée pour la surface des ondes.

En cherchant si les surfaces tétraédrales, correspondantes à la première hypothèse, satisfont à cette relation, on trouve que, pour la surface représentée par l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m+\left(\frac{z}{c}\right)^m=1, \tag{73}$$

on a

$$\varpi\rho'\rho'' = (m-1)^2 N_x N_y N_z. \tag{74}$$

Ainsi, parmi les surfaces tétraédrales, les surfaces du second degré seules satisfont à l'équation (67).

Au reste, parmi les surfaces répondant au problème posé, les surfaces tétraédrales sont les seules *pour lesquelles la génératrice de contact du cône du complexe défini plus haut relatif à un point de la surface et du plan tangent en ce point coïncide avec une tangente asymptotique de la surface.*

12. Après cette digression relative à toute une classe de surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent comme celles de la surface des ondes, revenons à cette surface particulière pour étudier et déterminer, si c'est possible, ses lignes de courbure. Nous reprendrons les notations primitives et nous emploierons, pour former l'équation différentielle des lignes de courbure, les formules d'Olinde Rodrigues.

Ici les cosinus directeurs de la normale sont

$$P\sqrt{\alpha}, \quad Q\sqrt{\alpha}, \quad R\sqrt{\alpha}.$$

Les équations cherchées se présentent donc sous la forme simple

$$\left\{\begin{aligned} dX + \rho d(P\sqrt{\alpha}) &= 0, \\ dY + \rho d(Q\sqrt{\alpha}) &= 0, \\ dZ + \rho d(R\sqrt{\alpha}) &= 0, \end{aligned}\right. \tag{75}$$

où ρ désigne le rayon de courbure principal.

Ajoutons les équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par $2X$, $2Y$, $2Z$: nous trouverons la relation

$$d\beta + 2\rho d\sqrt{\alpha} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\rho = -\sqrt{\alpha}\frac{d\beta}{d\alpha}. \tag{76}$$

Cette expression est en parfait accord avec celle que nous avons donnée au n° **1071**, où nous avons déjà employé, pour une surface quelconque, le système de coordonnées curvilignes α, β.

En portant l'expression de ρ dans la première équation (75), par exemple, nous aurons l'équation différentielle des lignes de courbure sous la forme

$$dX - \sqrt{\alpha}\frac{d\beta}{d\alpha} d(P\sqrt{\alpha}) = 0.$$

Remplaçons X et P par leurs valeurs, il viendra

$$a(a-\beta)(a-\beta')\,d\alpha\,d\alpha' - \alpha'(a-\alpha)(a-\alpha')\,d\beta\,d\beta' = 0,$$

ou, en tenant compte de l'une des équations (24),

$$\frac{l\,d\alpha\,d\alpha'}{\alpha\alpha'^2} = d\beta\,d\beta'. \tag{77}$$

Telle est l'équation différentielle cherchée, mais elle contient quatre variables. On éliminera aisément α' et β', par exemple, et l'on sera conduit à l'équation suivante

$$f(\beta)\,d\alpha^2 + f(\alpha)\,d\beta^2 - \left\{2f(\alpha) + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\}d\alpha\,d\beta = 0, \tag{78}$$

qui a quelque analogie avec l'équation d'Euler. Comme l'équation différentielle (77) est symétrique en β et β', on pourrait conserver les variables α et β'; et l'on serait conduit à l'équation

$$f(\beta')\,d\alpha^2 + f(\alpha)\,d\beta'^2 - \left\{2f(\alpha) + (\beta'-\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\}d\alpha\,d\beta' = 0, \tag{79}$$

toute semblable à la précédente.

Ces équations admettent des solutions particulières définies par les relations

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 0, \qquad f(\beta') = 0, \qquad (\alpha-\beta)(\alpha-\beta') = 0,$$

qui correspondent aux lignes de courbure évidentes de la surface des ondes, les sections principales, les cercles de la surface.

Si l'on remplace, dans l'équation (78), $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ par son expression en fonction de ρ, on aura l'équation du second degré

$$f(\alpha)\rho^2 + \sqrt{\alpha}\left\{2f(\alpha) + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\}\rho + \alpha f(\beta) = 0, \tag{80}$$

qui fera connaître, en chaque point, les rayons de courbure principaux. Cette équation permet de vérifier la relation (72) déjà établie et d'en trouver une nouvelle.

On a ici, en effet, en conservant les notations et les conventions du n° **11**,

$$\left\{\begin{aligned} N_x &= -\frac{X}{P\sqrt{\alpha}} = -\sqrt{\alpha}\,\frac{a-\beta}{a-\alpha}, \\ N_y &= -\frac{Y}{Q\sqrt{\alpha}} = -\sqrt{\alpha}\,\frac{b-\beta}{b-\alpha}, \qquad \varpi = -\sqrt{\alpha}, \\ N_z &= -\frac{Z}{R\sqrt{\alpha}} = -\sqrt{\alpha}\,\frac{c-\beta}{c-\alpha}, \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Si donc ρ' et ρ'' désignent les deux rayons de courbure principaux, on aura

$$\rho'\rho'' = \frac{\alpha f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{N_x N_y N_z}{\varpi}. \tag{82}$$

C'est la formule établie plus haut. On aura de même

$$\rho' + \rho'' = -2\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha}(\beta - \alpha)\left[\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} - \frac{1}{\alpha}\right],$$

ce qui donnera

$$\rho' + \rho'' = N_x + N_y + N_z - \frac{\beta}{\varpi}, \tag{83}$$

relation entièrement géométrique, puisque β est le carré du rayon vecteur.

13. Revenons à l'équation différentielle (78). Elle est plus compliquée que celle d'Euler, mais elle s'en rapproche en ce sens qu'elle se forme comme elle au moyen d'un polynôme $f(\alpha)$, dont les coefficients n'apparaissent pas dans l'équation. Nous allons d'abord effectuer quelques transformations qui nous seront utiles.

Si l'on pose, en substituant la variable t à β,

$$\beta = \alpha + \frac{t}{\alpha}, \tag{84}$$

l'équation deviendra

$$\varphi(\alpha)\frac{dt^2}{d\alpha^2} - \varphi'(\alpha)t\frac{dt}{d\alpha} + t\varphi(\alpha) + \frac{t^2}{2}\varphi''(\alpha) + \frac{t^3}{24}\varphi^{\text{IV}}(\alpha) = 0, \tag{85}$$

$\varphi(\alpha)$ désignant le polynôme

$$\varphi(\alpha) = \alpha f(\alpha). \tag{86}$$

Remplaçons maintenant t par la variable u

$$u = \frac{\varphi(\alpha)}{t}. \tag{87}$$

L'équation prendra la forme

$$\varphi(\alpha)\frac{du^2}{d\alpha^2} - \varphi'(\alpha)u\frac{du}{d\alpha} + u^3 + \frac{u^2}{2}\varphi''(\alpha) + \frac{u}{24}\varphi(\alpha)\varphi^{\text{IV}}(\alpha) = 0. \tag{88}$$

Ces différentes transformations nous permettent d'établir la cu-

rieuse proposition suivante : *L'équation différentielle* (78) *s'intègre dès que le polynôme* $f(\alpha)$, *qui est, en général, du troisième degré, se réduit à un polynôme du second degré.*

Dans ce cas, en effet, le polynôme $\varphi(\alpha)$, défini par la formule (86), se réduit au troisième degré. Le dernier terme de l'équation (88) disparaît et l'on peut, en la divisant par $\frac{du^2}{d\alpha^2}$, lui donner la forme suivante

$$\varphi\left(\alpha - u\frac{d\alpha}{du}\right) + u^3\left(\frac{d\alpha^3}{du^3} + \frac{d\alpha^2}{du^2}\right) = 0. \tag{89}$$

en supposant, comme il est permis, que le coefficient de x^3 dans $\varphi(x)$ soit égal à l'unité [1].

Si donc on effectue la substitution définie par les formules

$$\frac{d\alpha}{du} = \eta, \qquad \alpha - u\frac{d\alpha}{du} = \xi, \tag{90}$$

qui nous donnent

$$u = -\frac{d\xi}{d\eta}, \tag{91}$$

l'équation prendra la forme

$$\varphi(\xi) = \frac{d\xi^3}{d\eta^3}(\eta^3 + \eta^2), \tag{92}$$

qui s'intègre immédiatement par la séparation des variables et nous donne

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt[3]{\varphi(\xi)}} = \int \eta^{-\frac{2}{3}}(1+\eta)^{-\frac{1}{3}}\,d\eta. \tag{93}$$

On aura ensuite

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \xi - \eta\frac{d\xi}{d\eta}, \\ \beta &= \alpha + \frac{f(\alpha)}{u} = \alpha - \frac{f(\alpha)\,d\eta}{d\xi}. \end{aligned}\right. \tag{94}$$

L'intégrale se présente donc sous une forme assez compliquée; et elle n'est pas généralement algébrique.

14. Voyons maintenant quelles sont les conséquences géométriques du résultat analytique précédent. En voici une à peu près évidente.

---

[1] Si $\varphi(x)$ était de degré inférieur à 3, il faudrait supprimer le terme en $\frac{d\alpha^3}{du^3}$, ce qui faciliterait encore l'intégration.

Supposons d'abord que l'ellipsoïde (E) se réduise à un cylindre, l'axe $\sqrt{c}$ croissant indéfiniment. La surface des ondes deviendra l'apsidale d'un cylindre elliptique. Pour savoir ce que devient alors l'équation différentielle des lignes de courbure, il faudra prendre le coefficient de c dans l'équation (78), ce qui revient à remplacer $f(\alpha)$ par le polynôme du second degré

$$f(\alpha) = (\alpha - a)(\alpha - b). \tag{95}$$

Donc, *on sait déterminer les lignes de courbure de la surface apsidale d'un cylindre et ces lignes de courbure ne sont pas algébriques.*

Supposons maintenant que l'ellipsoïde (E) se rapproche d'une sphère, par exemple de la sphère de rayon 1. On pourra supposer que les carrés des axes a, b, c soient de la forme

$$a = 1 + \varepsilon a_1, \qquad b = 1 + \varepsilon b_1, \qquad c = 1 + \varepsilon c_1, \tag{96}$$

ε étant un infiniment petit et a_1, b_1, c_1 des quantités finies. La différence $\beta - \alpha$ sera alors de l'ordre de ε^2; cela résulte de la définition géométrique des variables α et β. On devra donc poser

$$\alpha = 1 + \varepsilon\alpha_1, \qquad t = \varepsilon^2 t', \tag{97}$$

et l'on aura

$$\varphi(\alpha) = (1 + \varepsilon\alpha_1)\varepsilon^3\varphi_1(\alpha_1), \qquad u = \varepsilon u_1, \tag{98}$$

en posant

$$\varphi_1(\alpha_1) = (\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - b_1)(\alpha_1 - c_1). \tag{99}$$

Si l'on substitue toutes ces expressions dans l'équation différentielle (88) et si l'on conserve seulement les termes de degré moindre, qui contiennent ε^3 en facteur, il restera l'équation

$$\varphi_1(\alpha_1)\frac{du_1^2}{d\alpha_1^2} - \varphi_1'(\alpha_1)u_1\frac{du_1}{d\alpha_1} + u_1^3 + \frac{u_1^2}{2}\varphi_1''(\alpha_1) = 0. \tag{100}$$

Aux notations près, nous retrouvons l'équation primitive (88), où $\varphi(\alpha)$ serait remplacée par un polynôme du troisième degré. Et nous avons vu qu'alors l'intégration se ramène aux quadratures. Ainsi :

On sait déterminer les lignes de courbure de toutes les surfaces des ondes qui diffèrent peu d'une sphère. Ces lignes de courbure ne sont pas algébriques.

Il suit de là que, *dans le cas général où les trois axes de la surface sont inégaux, les lignes de courbure ne sauraient être algébriques.*

Quand on aura intégré l'équation (100), les coordonnées du point de la surface se détermineront en fonction de u_1 et α_1 par les formules

$$(101)\quad \begin{cases} X = \sqrt{\dfrac{(a_1-\alpha_1)(a_1-\alpha_1-u_1)}{(a_1-b_1)(a_1-c_1)}}, \\ Y = \sqrt{\dfrac{(b_1-\alpha_1)(b_1-\alpha_1-u_1)}{(b_1-a_1)(b_1-c_1)}}, \\ Z = \sqrt{\dfrac{(c_1-\alpha_1)(c_1-\alpha_1-u_1)}{(c_1-a_1)(c_1-b_1)}}. \end{cases}$$

Ces valeurs, satisfaisant à la relation

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$

montrent bien que la surface se réduit alors à une sphère.

15. On obtient le même résultat en supposant que deux des axes seulement, a et b par exemple, tendent à devenir égaux, le troisième c restant différent des deux premiers. La surface des ondes se décomposera en un ellipsoïde et une sphère. Pour la partie qui se rapproche d'une sphère, α et β différeront peu du rayon de la sphère. On sera ainsi conduit à poser encore

$$(102)\quad \begin{cases} a = 1+\varepsilon a_1, \\ b = 1+\varepsilon b_1, \\ \alpha = 1+\varepsilon \alpha_1; \end{cases}$$

$$(103)\quad \varphi(\alpha) = \varepsilon^2(\alpha_1-a_1)(\alpha_1-b_1)(1-c)+\ldots = \varepsilon^2\varphi_1(\alpha_1)+\ldots;$$

u restera finie et l'équation (88) se réduira à la suivante

$$\varphi_1(\alpha_1)\frac{du^2}{d\alpha_1^2} - \varphi_1'(\alpha_1)u\frac{du}{d\alpha_1} + u^3 + \frac{u^2}{2}\varphi_1''(\alpha_1) = 0,$$

qui n'est autre, avec un changement de notations, que l'équation (88) où $\varphi(\alpha)$ se réduirait non plus au troisième, mais au second degré.

Ainsi, *quand la surface des ondes se décompose en un ellipsoïde et une sphère, on sait déterminer, sur la sphère, les positions limites des lignes de courbure.*

16. Bien que nous n'ayons pu obtenir, dans le cas général, une détermination en termes finis des lignes de courbure, néanmoins plu-

sieurs résultats essentiels sont fournis par l'analyse précédente. Nous voyons, non seulement que les lignes de courbure ne sont pas algébriques, mais encore que, si ces lignes présentaient quelque intérêt dans l'étude optique de la surface, nous pourrions les faire connaître avec une suffisante approximation. Car les surfaces des ondes relatives aux différents cristaux sont peu différentes de la sphère et surtout ont toujours, au moins, deux de leurs axes très peu différents l'un de l'autre. Le lecteur s'en convaincra aisément, s'il jette les yeux sur le Tableau suivant, qui donne les indices de quelques cristaux (relativement à la raie D) :

Gypse...........	1,529	1,522	1,520
Orthose....... ..	1,526	1,523	1,519
Aragonite.	1,685	1,681	1,530
Diopside.........	1,700	1,678	1,671
Stilbite..........	1,500	1,498	1,494
Oligoclase.......	1,542	1,538	1,534
Amblygonite.....	1,597	1,593	1,578
Sphène..........	2,009	1,894	1,888
Epidote..	1,768	1,754	1,730
Staurotide.......	1,746	1,741	1,736

Les lignes de courbure de la surface des ondes ont d'ailleurs été l'objet d'un assez grand nombre de recherches. A la suite d'une affirmation inexacte, d'après laquelle ces lignes seraient les courbes de contact d'une développable circonscrite à la surface et à une sphère concentrique, Combescure, dans un élégant Article inséré en 1859 au tome II des *Annali di Matematica*, p. 278, a formé leur équation différentielle. Dans quelques remarques qui suivent cet Article, M. Brioschi a montré que l'équation différentielle obtenue par M. Combescure peut se ramener à la forme

$$\psi(p)\frac{d\omega^2}{dp^2} = e^{\omega} + e^{-\omega} - \psi''(p),$$

où l'on pose

$$\psi(p) = \sqrt{\varphi(p)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Mais toutes les recherches faites pour obtenir la solution complète du problème ont, jusqu'ici, complètement échoué.

NOTE IX.

SUR LA GÉOMÉTRIE CAYLEYENNE ET SUR UNE PROPRIÉTÉ DES SURFACES A GÉNÉRATRICE CIRCULAIRE.

1. Au n° 697, nous avons considéré l'élément linéaire défini par la formule

$$ds^2 = du^2 + (\mathrm{V}\cos a u + \mathrm{V}_1 \sin a u + \mathrm{V}_2)\, dv^2, \tag{1}$$

où a désigne une constante, $\mathrm{V}, \mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ des fonctions de v; et nous avons fait remarquer : 1° que cet élément linéaire comprend, comme cas limite, celui qui convient aux surfaces réglées rapportées au système de coordonnées formé par les génératrices rectilignes et leurs trajectoires orthogonales; 2° qu'il se rapproche encore de l'élément linéaire des surfaces réglées par la propriété suivante : parmi les surfaces auxquelles il convient, il y en a une qui admet en quelque sorte un double mode de génération, c'est-à-dire dont l'élément linéaire est réductible de deux manières différentes à la forme (1).

A la fin du n° 697, nous avons annoncé que nous aurions à revenir sur toutes ces propriétés pour les présenter sous un nouveau jour. C'est ce que nous allons faire dans cette Note, en appliquant les résultats que nous avons donnés au Livre VII, Chapitre XIV, relativement à la Géométrie cayleyenne.

Prenons, pour surface *fondamentale* ou *absolu,* la quadrique (Q) définie par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0. \tag{2}$$

Si l'on considère maintenant la quadrique (Θ) définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{h} = 0, \tag{3}$$

les coordonnées d'un point quelconque de (Θ) pourront s'exprimer

par les formules suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{a(a-\rho)(a-\rho_1)}{f'(a)}, & y^2 = \dfrac{b(b-\rho)(b-\rho_1)}{f'(b)}, \\ z^2 = \dfrac{c(c-\rho)(c-\rho_1)}{f'(c)}, & t^2 = \dfrac{h(h-\rho)(h-\rho_1)}{f'(h)}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(5)\qquad f(u) = (u-a)(u-b)(u-c)(u-h),$$

et où ρ, ρ_1 désignent deux variables auxiliaires. On reconnaît immédiatement que l'on a

$$(6)\qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

On vérifiera aussi sans difficulté : 1° que les lignes de paramètres ρ et ρ_1 sont conjuguées sur la quadrique (Θ) ; 2° qu'elles sont orthogonales par rapport à la quadrique (Q) (n° **836**). Par suite, ce sont les lignes de courbure de la surface (Θ) (n° **840**), lorsqu'on prend pour *absolu* la quadrique (Q).

Puisque les coordonnées x, y, z, t satisfont à la relation (6), l'élément linéaire *cayleyen* de (Θ) (n° **837**) aura pour expression

$$(7)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2,$$

et un calcul facile nous donnera

$$(8)\qquad ds^2 = (\rho - \rho_1)\left[\frac{\rho\, d\rho^2}{f(\rho)} - \frac{\rho_1\, d\rho_1^2}{f(\rho_1)}\right].$$

C'est l'élément linéaire que nous avons rencontré aux nos **695**, **696** ; et sa forme harmonique montre immédiatement que, conformément aux résultats indiqués au n° **839**, on sait déterminer, dans la Géométrie cayleyenne, les lignes géodésiques de toute surface du second degré.

2. Après avoir établi ce premier résultat, considérons une surface réglée quelconque (R) et proposons-nous de déterminer son élément linéaire dans la Géométrie cayleyenne. Prenons une courbe quelconque (C) sur cette surface. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les coordonnées du point A de (C) situé sur une génératrice rectiligne quelconque (d). Ces coordonnées sont des fonctions d'un paramètre v, et, pourvu que la courbe (C) ne soit pas tracée sur la quadrique (Q), on peut toujours supposer qu'elles soient liées par l'équation

$$(9)\qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1.$$

Soient de même b_1, b_2, b_3, b_4 les coordonnées du point B situé sur la même génératrice rectiligne et conjugué de A par rapport à la quadrique (Q). On aura nécessairement

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0, \tag{10}$$

et l'on peut encore admettre que b_1, b_2, b_3, b_4 vérifient la condition

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 1. \tag{11}$$

Enfin, si l'on suppose que la courbe (C) soit une trajectoire orthogonale cayleyenne des génératrices rectilignes, il faudra joindre, aux trois relations précédentes, la suivante

$$a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3 + a_4 b'_4 = -b_1 a'_1 - b_2 a'_2 - b_3 a'_3 - b_4 a'_4 = 0, \tag{12}$$

que nous supposerons également vérifiée.

Cela posé, les coordonnées d'un point M de la surface réglée, situé sur la génératrice (d), seront définies par les formules

$$\left\{\begin{aligned} X &= a_1 \cos u + b_1 \sin u, \\ Y &= a_2 \cos u + b_2 \sin u, \\ Z &= a_3 \cos u + b_3 \sin u, \\ T &= a_4 \cos u + b_4 \sin u, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

u désignant la distance AM. Comme ces coordonnées satisfont à la relation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1, \tag{14}$$

l'élément linéaire de la surface réglée (R) se déterminera (n° **837**) par la formule

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dT^2,$$

et l'on trouvera l'expression suivante

$$dS^2 = du^2 + (V \cos^2 u + 2 V_1 \cos u \sin u + V_2 \sin^2 u)\, dv^2, \tag{15}$$

où l'on a posé

$$\left\{\begin{aligned} V &= a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 + a_4'^2, \\ V_1 &= a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a'_3 b'_3 + a'_4 b'_4, \\ V_2 &= b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 + b_4'^2. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

L'expression (15) de l'élément linéaire est identique, avec un léger changement de notations et à un facteur constant près, à celle qui est fournie par l'équation (1) et que nous avons rencontrée au n° **697**.

La véritable origine de cette forme particulière de l'élément linéaire est ainsi reconnue : elle convient aux surfaces réglées, dans la Géométrie cayleyenne.

Ce point étant établi, on s'explique aisément pourquoi l'élément linéaire défini par la formule (8) peut être ramené de deux manières différentes à la forme (1). Cela tient à ce que cet élément linéaire convient, dans la Géométrie cayleyenne, à une surface du second degré (Θ). Comme cette surface est doublement réglée, on peut, de deux manières différentes, la rapporter à un système de coordonnées formé de génératrices rectilignes et de leurs trajectoires orthogonales.

3. Les formules que nous avons établies permettent d'étendre à la Géométrie cayleyenne la proposition fondamentale relative à la déformation des surfaces réglées. *Un élément linéaire de la forme* (15) *convient à une infinité de surfaces réglées.* Car si l'on considère les fonctions V, V_1, V_2 comme données, les huit fonctions a_i, b_k devront satisfaire seulement aux sept équations (9), (10), (11), (12), (16) ; une de ces fonctions pourra donc être choisie arbitrairement. Je laisse de côté tout ce qui concerne l'étude de ce système de sept équations différentielles.

Si l'on applique aux surfaces réglées la transformation géométrique ponctuelle qui a été définie et étudiée au n° 846, on est mis sur la voie d'une proposition intéressante relative aux surfaces engendrées par des cercles.

En effet, la transformation du n° 846 fait correspondre à toute surface réglée (R) une surface (K) engendrée par des cercles *normaux à la sphère fixe* (S) ; et, de plus, si l'on désigne l'élément linéaire euclidien de (K) par ds et par dS l'élément linéaire cayleyen de (R) par rapport à (S), on aura (n° 849)

$$dS^2 = \frac{4R^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}\,ds^2, \tag{17}$$

R étant le rayon de la sphère (S) et x, y, z désignant les coordonnées du point de la surface (K).

Donc, *à toutes les surfaces réglées admettant le même élément linéaire relativement à la sphère* (S) *choisie comme quadrique fondamentale, correspondent des surfaces engendrées par des cercles normaux à* (S) *et pour lesquelles le quotient*

$$\frac{ds^2}{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}$$

a la même expression. On peut donc établir, entre toutes ces surfaces engendrées par des cercles orthogonaux à la sphère (S), une correspondance avec similitude des éléments infiniment petits. Nous allons généraliser cette proposition et l'étendre à toutes les surfaces engendrées par un cercle.

4. Les surfaces engendrées par des cercles ont déjà été étudiées d'une manière assez complète ([1]). Nous établirons tout d'abord quelques propriétés essentielles des trajectoires orthogonales de tous les cercles.

Rapportons chaque cercle (C) de la surface à un trièdre mobile (T) ayant pour sommet le centre du cercle O, pour axe des z la perpendiculaire au plan du cercle, pour axes des x et des y deux diamètres rectangulaires du cercle. Cette définition du trièdre comporte une certaine indétermination. Ajoutons de plus la condition que la composante r de la rotation autour de Oz soit nulle. Alors les projections du déplacement infiniment petit d'un point de coordonnées relatives x, y, z seront

$$(18)\qquad \begin{cases} dx+(\xi+qz)\,dv, \\ dy+(\eta-pz)\,dv, \\ dz+(\zeta+py-qx)\,dv, \end{cases}$$

v désignant la variable dont dépend la position du trièdre. Nous allons appliquer ces formules à la surface (Σ) engendrée par le cercle (C).

Si ρ désigne le rayon de ce cercle, les coordonnées d'un de ses points auront pour valeurs

$$(19)\qquad x=\rho\cos u,\qquad y=\rho\sin u,\qquad z=0.$$

En appliquant donc les formules (18), on trouvera sans peine, pour l'élément linéaire de (Σ), l'expression suivante

$$(20)\qquad ds^2=\rho^2\,du^2+2\rho(\eta\cos u-\xi\sin u)\,du\,dv+\mathrm{M}\,dv^2,$$

M ayant pour valeur

$$(21)\quad \mathrm{M}=\rho'^2+\xi^2+\eta^2+(\zeta+p\rho\sin u-q\rho\cos u)^2+2\rho'(\xi\cos u+\eta\sin u).$$

Il résulte immédiatement de ces formules que les trajectoires orthogonales des génératrices circulaires seront déterminées par l'équation

---

([1]) On pourra lire en particulier une étude : *Sur les surfaces à génératrice circulaire*, insérée, en 1885, au Tome II (3e série) des *Annales de l'École Normale supérieure* par M. Demartres.

différentielle

$$\rho\, du + (\eta \cos u - \xi \sin u)\, dv = 0, \tag{22}$$

qui est bien une équation de Riccati. Ainsi se trouve établi le résultat que l'on doit à M. Demartres et le lecteur reconnaîtra aisément, d'après la signification géométrique de u, qu'il peut s'énoncer sous la forme suivante :

Le rapport anharmonique des points où quatre trajectoires orthogonales quelconques coupent un même cercle est constant.

Cette proposition avait déjà été donnée par MM. E. Picard et Ribaucour (n° **1006**), pour le cas des surfaces enveloppes de sphères.

Il en résulte, on le reconnaît aisément, qu'au lieu de définir le cercle (C) par les équations (19), on peut employer les suivantes

$$\left\{\begin{aligned} x + iy &= a\,\frac{t-\alpha}{t-\beta}, \\ x - iy &= b\,\frac{t-\beta}{t-\alpha}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

a, b, α, β étant des fonctions de v assujetties à la condition

$$ab = \rho^2, \tag{24}$$

et t étant une variable *qui demeurera constante sur chaque trajectoire orthogonale des génératrices circulaires;* a et b, comme α et β, seront des fonctions imaginaires conjuguées.

Avec les formules (23), l'élément linéaire de la surface (Σ), défini par la formule

$$ds^2 = [dx + i\,dy + (\xi + i\eta)\,dv][dx - i\,dy + (\xi - i\eta)\,dv] + (\zeta + py - qx)^2\, dv^2,$$

prendra la forme suivante :

On aura

$$\left\{\begin{aligned} dx + i\,dy + (\xi + i\eta)\,dv &= \frac{a(\alpha-\beta)}{(t-\beta)^2}[dt + \mathrm{P}(t)\,dv], \\ dx - i\,dy + (\xi - i\eta)\,dv &= \frac{b(\beta-\alpha)}{(t-\alpha)^2}[dt + \mathrm{P}_0(t)\,dv], \\ \zeta + py - qx &= \frac{\rho\,\mathrm{Q}(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)}, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

P, P_0, Q étant des polynômes du second degré en t, dont les coeffi-

cients seront des fonctions de v. Il viendra donc

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{(t-\alpha)^2(t-\beta)^2}\left\{-(\alpha-\beta)^2[dt+\mathrm{P}(t)\,dv][dt+\mathrm{P}_0(t)\,dv]+\mathrm{Q}^2(t)\,dv^2\right\}. \tag{26}$$

Pour que les courbes de paramètre t soient les trajectoires orthogonales, il faudra que le terme en $dv\,dt$ disparaisse, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathrm{P}(t)+\mathrm{P}_0(t)=0. \tag{27}$$

En égalant à zéro les coefficients des puissances de t, on aura trois équations auxquelles devront satisfaire les fonctions α, β, a, b et leurs dérivées. Ces équations contiendront d'ailleurs ξ, η. En les supposant vérifiées, on trouvera pour l'élément linéaire de la surface l'expression

$$ds^2 = -\frac{(\alpha-\beta)^2\rho^2}{(t-\alpha)^2(t-\beta)^2}[dt^2+\mathrm{F}(t)\,dv^2], \tag{28}$$

$\mathrm{F}(t)$ désignant le polynôme *du quatrième degré* défini par l'équation

$$\mathrm{F}(t) = -\mathrm{P}^2(t) - \frac{\mathrm{Q}^2(t)}{(\alpha-\beta)^2}. \tag{29}$$

Les cinq coefficients de $\mathrm{F}(t)$ sont des fonctions de v composées avec les translations ξ, η, ζ, les rotations p, q, les fonctions a, b, α, β et leurs dérivées premières. Si l'on se donne ces cinq coefficients *a priori*, les neuf fonctions précédentes devront, par suite, satisfaire à cinq équations. Il faut leur adjoindre les trois équations résultant de l'identité (27); de sorte que les neuf fonctions ξ, η, ζ, p, q, a, b, α, β devront satisfaire seulement à huit équations, où figureront d'ailleurs les dérivées des quatre dernières. Puisqu'on a huit équations pour neuf fonctions, l'une de ces fonctions pourra être choisie arbitrairement. Ainsi, *il existe une infinité de surfaces à génératrices circulaires, contenant dans leur équation une fonction arbitraire, et pour lesquelles le polynôme* $\mathrm{F}(t)$ *a la même expression.* Les éléments linéaires de deux de ces surfaces étant évidemment proportionnels, on pourra établir entre elles une correspondance avec similitude des éléments infiniment petits. C'est là le fait essentiel que nous voulions établir.

Si l'on suppose en particulier que le polynôme $\mathrm{F}(t)$ ait tous ses coefficients constants, on obtiendra toutes les surfaces pour lesquelles les cercles constituent une famille isotherme [1].

---

[1] Ces surfaces ont été déterminées par M. DEMARTRES dans son *Mémoire sur*

5. Pour donner plus de précision à la proposition générale que nous venons d'établir, considérons sur la surface (Σ) deux trajectoires orthogonales des cercles correspondantes aux valeurs t_0, t_1 de t et construisons, pour chaque cercle (C) de la surface, la sphère (S) qui le coupe à angle droit, aux deux points où il est rencontré par les trajectoires précédentes. Si R est le rayon de cette sphère variable et si S désigne la puissance d'un point relative à cette sphère, un calcul facile montrera que, pour chaque point du cercle (C) de la surface, on a

$$(30)\qquad (t_0-t_1)^2\left(\frac{S}{R}\right)^2 = -4\rho^2(\alpha-\beta)^2\frac{(t-t_0)^2(t-t_1)^2}{(t-\alpha)^2(t-\beta)^2}.$$

Par suite l'élément linéaire donné par la formule (28) peut se mettre sous la forme

$$(31)\qquad ds^2 = \left(\frac{S}{2R}\right)^2(t_0-t_1)^2\frac{dt^2+F(t)\,dv^2}{(t-t_0)^2(t-t_1)^2},$$

de sorte que, pour deux surfaces correspondant au même polynôme $F(t)$, le produit

$$\frac{2R}{S}\,ds$$

aura la même valeur.

Cette remarque détermine la valeur exacte du rapport de similitude en deux points correspondants.

Si l'on suppose que tous les cercles (C) soient normaux à une sphère fixe (S), les points où le cercle variable (C) coupe cette sphère décrivent deux trajectoires orthogonales des cercles; et si l'on applique la remarque précédente en choisissant ces deux trajectoires orthogonales particulières, on retrouve la proposition du n° 3 de cette Note, qui nous a servi de point de départ.

Inversement, l'emploi de quelques considérations de Géométrie infinitésimale permet de rattacher le théorème général à la proposition particulière du n° 3.

---

les surfaces qui sont divisées en carrés par une suite de cercles et leurs trajectoires orthogonales inséré en 1887 aux *Annales de l'École Normale supérieure* (t. IV, 3e série, p. 145).

NOTE X.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1. Aux nos 718 et 1078, j'ai fait allusion à une méthode qui permet, dans certains cas, d'obtenir des résultats plus complets et de résoudre des équations aux dérivées partielles qui échappent aux méthodes de Monge et d'Ampère; je vais, dans cette Note, reproduire textuellement les points essentiels du travail que j'ai composé sur ce sujet et qui, présenté en mars 1870 à l'Académie des Sciences [1], a été reproduit la même année au Tome VII des *Annales de l'École Normale* (1re série).

Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

l'équation proposée, et soit

$$(2) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt = 0$$

sa différentielle totale; adoptons, pour résoudre la question, la méthode du changement de variables employée avec tant de succès par Ampère et par Cauchy. Pour cela, nous remplacerons x et y par les variables indépendantes x, y_0; y_0 étant une fonction de x et de y que l'on pourra déterminer comme on le jugera convenable.

Nous aurons d'abord les relations suivantes, qui sont bien connues :

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y_0} = s\frac{\partial y}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y_0} = t\frac{\partial y}{\partial y_0},$$

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}.$$

[1] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 67 et 746.

De plus, les conditions d'intégrabilité prendront la forme

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y_0} &= \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x},\\ \frac{\partial r}{\partial y_0} &= \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial s}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x},\\ \frac{\partial s}{\partial y_0} &= \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial t}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

A ces équations il faut joindre la suivante, obtenue en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à y_0 :

$$Y\frac{\partial y}{\partial y_0} + Z\frac{\partial z}{\partial y_0} + P\frac{\partial p}{\partial y_0} + Q\frac{\partial q}{\partial y_0} + R\frac{\partial r}{\partial y_0} + S\frac{\partial s}{\partial y_0} + T\frac{\partial t}{\partial y_0} = 0.$$

Servons-nous maintenant des équations (3), (4), (5) pour éliminer de l'équation précédente toutes les dérivées par rapport à y_0, excepté $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ et $\frac{\partial t}{\partial y_0}$; nous obtiendrons la nouvelle équation

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(Y + Zq + Ps + Qt + R\frac{\partial s}{\partial x} + S\frac{\partial t}{\partial x} - R\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial y_0}\\ &\qquad - \left[S\frac{\partial y}{\partial x} - R\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - T\right]\frac{\partial t}{\partial y_0} = 0. \end{aligned}\right.$$

Or on peut supposer, d'après des principes qu'il est inutile de rappeler ici, que y_0 a été choisi de manière que l'équation suivante

$$(6)\qquad R\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - S\frac{\partial y}{\partial x} + T = 0$$

soit satisfaite.

L'équation (a) se réduit alors et devient

$$Y + Zq + Ps + Qt + R\frac{\partial s}{\partial x} + S\frac{\partial t}{\partial x} - R\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire, en tenant compte de l'équation (6),

$$(7)\qquad Y + Zq + Ps + Qt + R\frac{\partial s}{\partial x} + T\frac{\dfrac{\partial t}{\partial x}}{\dfrac{\partial y}{\partial x}} = 0.$$

Nous avons donc, en résumé, à déterminer les sept inconnues y, z, p, q, r, s, t fonctions de x et de y_0, et satisfaisant aux équations (1), (3), (4), (6), (7). On peut même remplacer l'équation proposée par

sa dérivée prise par rapport à x, qui, en tenant compte de l'équation (7), prend la forme simple

$$X + Zp + Pr + Qs + R\frac{\partial r}{\partial x} + T\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}} = 0. \tag{8}$$

Or, parmi les équations (3), (4), (6), (7), (8), *six* ne contiennent pas la variable y_0; mais, comme il y a *sept* inconnues, le changement de variables n'a plus ici la même utilité que dans le cas du premier ordre; il ne peut donner la solution complète du problème.

2. La méthode précédente est susceptible d'une grande simplification dans le cas très important où l'équation proposée est de la forme

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0, \tag{9}$$

H, K, L, M, N étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q.

On peut ici se servir des équations

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r + s\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Si l'on déduit de ces deux équations r, s en fonction de t, et que l'on substitue leurs valeurs dans l'équation proposée (9), il arrive, *par suite de la forme particulière de cette équation*, que le coefficient de t s'annule; t disparaît du résultat. On est ainsi conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial x} = m,\\ &Hm^2 - 2Km + L + N\left(\frac{\partial p}{\partial x} + m\frac{\partial q}{\partial x}\right) = 0.\\ &H\left(\frac{\partial p}{\partial x} - m\frac{\partial q}{\partial x}\right) + 2K\frac{\partial q}{\partial x} + M - N\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 = 0,\\ &\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

qui ne contient plus les dérivées du second ordre r, s, t, mais seulement z, y, p, q et leurs dérivées par rapport à x. Ce sont les équations de Monge, auxquelles il faudrait joindre les suivantes

$$\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y_0} = \frac{\partial p}{\partial y_0}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q\frac{\partial y}{\partial y_0}. \tag{11}$$

pour la détermination complète de y, z, p, q.

Ainsi, dans le cas que nous venons d'examiner, et qui a été jusqu'ici presque le seul considéré par les géomètres, la forme particulière de l'équation permet d'éliminer du système des équations aux dérivées ordinaires considérées plus haut les trois dérivées r, s, t. Hâtons-nous de dire qu'une pareille simplification ne constitue que rarement un avantage, et que des simplifications analogues se présentent dans tous les ordres, quand les équations ont une forme convenablement choisie.

3. On a vu, dans les deux paragraphes précédents, que le problème des équations d'ordre supérieur se sépare très nettement du problème relatif aux équations du premier ordre. Pour le premier ordre, en effet, la méthode du changement de variables ramène la question à l'intégration d'un système *complet* d'équations aux dérivées ordinaires. Pour le second ordre et pour les ordres supérieurs, il y a au contraire moins d'équations que d'inconnues à déterminer. Les remarques qui suivent paraissent accuser aussi une différence profonde entre les deux problèmes.

Puisque, dans le cas où l'on se borne aux inconnues y, z, p, q, r, s, t, on a une équation de moins qu'il ne faudrait pour la solution cherchée du problème, il est naturel de se demander si, en adjoignant aux inconnues précédentes les quatre dérivées partielles du troisième ordre, que nous appellerons α, β, γ, δ, on ne parviendrait pas à un nombre d'équations suffisant pour déterminer comme fonctions de x, non seulement les inconnues primitives, mais aussi α, β, γ, δ. Il se présente ici un fait important, et qui, je crois, n'a pas été remarqué. *Le nombre des équations ne contenant pas y_0 est encore inférieur d'une unité au nombre des fonctions inconnues.* Ces équations ne suffisent donc pas à déterminer les inconnues, considérées comme fonctions de la seule variable x; mais la différence entre le nombre des équations et celui des inconnues reste la même qu'auparavant : elle est égale à l'unité. Il en est de même si, au lieu de s'arrêter au troisième ordre, on continue les calculs jusqu'à un ordre quelconque : *il y a toujours une équation de moins qu'il n'y a d'inconnues.*

Les résultats précédents établissent, on le voit, une différence essentielle entre les équations aux dérivées partielles du premier ordre et celles des ordres supérieurs. Pour les équations du premier ordre, le nombre des équations contenant seulement les dérivées par rapport à x est toujours égal au nombre des fonctions inconnues. Il n'en est plus de même pour les équations d'ordre supérieur. Pour l'équation de Monge, par exemple, considérée au n° 2, on n'a que trois rela-

tions pour déterminer z, p, q, y considérées comme fonctions de x. On sait tout le parti que l'on tire d'ailleurs de ces relations différentielles : toutes les fois qu'elles offrent deux combinaisons intégrables, on peut résoudre l'équation aux dérivées partielles proposée, ou du moins la ramener à une équation du premier ordre.

Les remarques que nous avons faites indiquent de même, pour les équations du second ordre, la méthode suivante :

On essayera de trouver, en dehors de l'équation proposée, deux combinaisons intégrables des équations en y, z, p, q, r, s, t. Si ces combinaisons existent dans les deux systèmes que l'on obtient en prenant successivement pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ les deux racines de l'équation du second degré (6) qui détermine cette dérivée, le problème pourra être considéré comme entièrement résolu; si l'on n'a pas de combinaison intégrable, on aura recours aux équations qui contiennent les dérivées du troisième ordre. *Alors même que les premières équations ne fourniraient pas de combinaison susceptible d'intégration, le second système formé avec les dérivées prises jusqu'au troisième ordre pourra en donner. Si ce système n'est pas susceptible d'intégration partielle, on ira jusqu'aux dérivées du quatrième ordre, et l'on pourra avoir des combinaisons intégrables; et ainsi de suite.*

4. La remarque énoncée à la fin du paragraphe précédent me paraît conduire à une méthode plus générale que celles qui sont habituellement employées. On peut, du reste, présenter cette méthode sous un autre point de vue qui permet d'obtenir plus facilement les systèmes successifs que l'on aura à intégrer partiellement.

Supposons que l'un quelconque de nos systèmes conduise à deux combinaisons intégrables

$$F(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}, \qquad F_1(x, y, z, p, q, \ldots) = \text{const.}$$

Les deux constantes qui figurent dans ces équations *doivent être considérées comme des fonctions inconnues de y_0*. Éliminant y_0, on est conduit à une équation de la forme

$$F = \text{fonction arbitraire de } F_1.$$

Cette dernière relation peut être évidemment considérée comme une nouvelle équation aux dérivées partielles, compatible avec la proposée, et qui admet en commun avec elle une intégrale *avec une fonction arbitraire*. Nous sommes donc conduits à la solution de la question suivante, qui répond à ce deuxième mode d'exposition :

Trouver une équation aux dérivées partielles

$$V = a$$

du $n^{\text{ième}}$ *ordre, admettant, en commun avec la proposée, une solution contenant au moins une fonction arbitraire.*

Pour cela, il suffit de remarquer que la proposée, différentiée $n-1$ fois, donne n équations contenant les dérivées d'ordre $n+1$, au nombre de $n+2$. L'équation $V = a$, différentiée successivement par rapport à x et à y, donne deux équations contenant, elles aussi, les dérivées d'ordre $n+1$. On a donc en tout $n+2$ équations contenant linéairement les dérivées d'ordre $n+1$, et qui déterminent ces $n+2$ dérivées en fonction des dérivées d'ordre inférieur, si les deux équations aux dérivées partielles dont on cherche la solution commune sont prises arbitrairement. Mais ici cela ne doit pas être; sans cela les dérivées d'ordre supérieur à $n+1$ se détermineraient toutes, comme les dérivées d'ordre $n+1$, en fonction des dérivées d'ordre moindre; puisque une fois obtenues toutes les dérivées d'ordre $n+1$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur, on n'aurait qu'à dériver toutes les équations qui donneraient chacune de ces dérivées pour avoir les dérivées d'ordre supérieur; et la solution commune, si elle existait, ne pourrait contenir tout au plus *qu'un nombre limité de constantes arbitraires*. Il faut donc que ces $n+2$ équations contenant linéairement les $n+2$ dérivées d'ordre $n+1$ forment un système indéterminé, ce qui donne deux équations de condition. Comme deux des équations contiennent les dérivées de V, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, ..., les relations de condition doivent être considérées comme deux équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles doit satisfaire la fonction V. Ces équations sont homogènes et du second degré par rapport aux dérivées.

Ce qui précède explique et généralise la remarque par laquelle Bour a établi que l'on peut toujours reconnaître si l'application des méthodes de Monge et d'Ampère pourra réussir. Bour n'avait examiné que le premier cas, celui où l'on suppose que l'équation du premier ordre a une intégrale intermédiaire.

5. Les deux méthodes que nous venons d'indiquer se retrouvent d'ailleurs dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La première, fondée sur le changement de variables, est due, comme on sait, à l'illustre Cauchy, qui l'a donnée en 1819. La seconde a été introduite dans la Science et développée par Jacobi. C'est en essayant d'établir un lien entre ces deux méthodes que j'ai

été amené à l'étude dont les résultats principaux ont été rapidement indiqués ici.

La seconde méthode permet de se rendre compte simplement du nombre des intégrations qui sont nécessaires pour la solution complète du problème; mais il est indispensable qu'avant de traiter ce point, nous entrions dans quelques explications.

Soit une équation aux dérivées partielles d'ordre n

$$F\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}, \ldots\right) = 0.$$

Désignons par R_n, R_{n-1}, ... les dérivées du premier membre de l'équation prises par rapport aux dérivées d'ordre n, $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\,\partial y}$, ... Nous appellerons *équation caractéristique* de l'équation aux dérivées partielles l'équation suivante à une inconnue u

$$R_n u^n + R_{n-1} u^{n-1} + \ldots = 0.$$

Par exemple, pour l'équation (1), considérée au commencement, cette équation caractéristique serait

$$R u^2 + S u + T = 0.$$

Cette définition une fois comprise, il est facile de compléter un résultat énoncé plus haut.

Pour que l'équation proposée

$$f(x, y, z, p, q, \ldots) = 0$$

et l'équation aux dérivées partielles $V = a$ aient une solution commune avec une fonction arbitraire, il faut d'abord que *l'équation caractéristique de l'équation* $V = a$ *admette une racine de l'équation*

$$R u^2 + S u + T = 0. \tag{12}$$

On voit donc que les équations $V = a$ que nous cherchons se divisent en deux classes, suivant qu'elles appartiennent à l'une ou à l'autre des racines de l'équation précédente. Pour la solution complète du problème, il suffit d'avoir une équation de chaque classe, contenant elle-même une fonction arbitraire. Un nombre quelconque d'équations différentielles appartenant à la même classe ne peut donner l'intégrale complète de notre équation. Il est, du reste, évident que si l'équation (12) est irréductible, si $S^2 - 4RT$ n'est pas carré parfait, il suffira de changer dans une intégrale le signe du radical pour en obtenir une nouvelle.

Ainsi, dans le cas où l'équation caractéristique est irréductible, il suffit, pour la solution complète du problème, que l'un des systèmes

à intégrer fournisse deux combinaisons intégrables correspondant à la même racine de l'équation irréductible.

Si l'on n'a pas le nombre voulu de combinaisons intégrables, on n'aura évidemment que des solutions particulières.

Les méthodes précédentes réussiront toujours, il est facile de le démontrer, toutes les fois que les intégrales seront de celles qu'Ampère appelle *intégrales de première espèce,* et qui ne contiennent pas de signe d'intégration.

6. Il est facile de déduire des remarques faites plus haut quelques notions nouvelles sur la méthode de la *variation des constantes,* méthode à laquelle Bour attachait la plus grande importance.

Voici, pour le cas du second ordre, comment on devrait appliquer la méthode de Lagrange; il faudrait d'abord chercher une intégrale particulière contenant cinq constantes et, remplaçant ensuite les constantes par des fonctions arbitraires, en disposer de manière que les expressions des dérivées jusqu'au second ordre restent toutes les mêmes. On serait ainsi ramené à un système d'équations simultanées en général tout aussi difficile à intégrer que l'équation proposée; et par conséquent la méthode n'offre plus les mêmes avantages que pour le premier ordre.

Mais supposons qu'au lieu de connaître l'intégrale finie avec cinq constantes, on ne connaisse qu'une intégrale particulière du premier ordre avec deux constantes

$$\varphi(x, y, z, p, q, a, b) = 0. \tag{13}$$

Cette intégrale satisfaisant, quels que soient a et b, à l'équation proposée, si, entre l'équation (13) et ses deux premières dérivées, on élimine a et b, on devra retrouver l'équation différentielle proposée. Cela posé, supposons que a et b soient, non plus des constantes, mais des fonctions de x, y, z, p, q; remplaçons b par une fonction arbitraire de a, et déterminons a par l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0; \tag{14}$$

a deviendra une fonction de x, y, z, p, q, déterminée par l'équation (14); les deux dérivées de l'équation (13) ne changeront pas de forme, et l'on aura cette fois *une intégrale intermédiaire avec une fonction arbitraire* déduite d'une intégrale ne contenant que deux constantes.

Le même théorème s'applique à toutes les équations $V = a$ considérées au n° 4.

NOTE XI.

SUR L'ÉQUATION AUXILIAIRE.

1. Dans un Article inséré en mars 1883 au tome XCVI des *Comptes rendus* (¹), j'ai introduit une notion qui me paraît utile : celle de *l'équation auxiliaire* d'une équation différentielle ordinaire, ou d'une équation aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables indépendantes. Comme l'équation auxiliaire intervient dans l'étude des deux problèmes de Géométrie qui font l'objet principal de la dernière Partie de cet Ouvrage, je vais en dire quelques mots, sans entrer d'ailleurs dans l'étude détaillée et approfondie de ses diverses applications.

Considérons, pour fixer les idées, une équation quelconque, différentielle ou aux dérivées partielles, définissant une fonction z d'une ou de plusieurs variables indépendantes. Si l'on y remplace z par $z + \varepsilon z'$, que l'on développe suivant les puissances de ε et que l'on égale à zéro le coefficient de ε, on aura une équation linéaire et homogène par rapport à z', que j'appellerai *l'équation auxiliaire* de l'équation proposée. L'équation auxiliaire définit les solutions infiniment voisines d'une solution donnée; elle a, par conséquent, une signification qui ne dépend en aucune manière du choix des variables indépendantes et qui subsiste après un changement quelconque de variables.

La notion de l'équation auxiliaire se généralise sans difficulté et s'étend à tout système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles; chaque système de ce genre, quel que soit le nombre des équations, des fonctions inconnues ou des variables indépendantes, admet un *système auxiliaire* qui définit ce que l'on peut appeler

(¹) DARBOUX (G.), *Sur les équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 766; 19 mars 1883).

toutes les solutions infiniment voisines d'une solution donnée. Pour obtenir le système auxiliaire on remplacera chaque fonction inconnu u_i par $u_i + \varepsilon u'_i$, et l'on égalera à zéro la dérivée de chaque équation par rapport à ε, en faisant $\varepsilon = 0$ après la dérivation (¹).

2. Lorsqu'on sait intégrer complètement un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, on sait évidemment intégrer le système auxiliaire. Il suffit, pour cela, de substituer à chacune des équations finies qui constituent l'intégrale sa variation première, obtenue en faisant varier toutes les arbitraires, constantes ou fonctions, qui entrent dans cette équation, et toutes les fonctions inconnues u_i dont, conformément à la notation déjà employée, on remplacera les variations δu_i par u'_i. Si, par exemple, il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont l'intégrale générale est définie par la formule

$$u = f(x, c, c_1),$$

l'équation auxiliaire aura pour intégrale

$$u' = \frac{\partial f}{\partial c} c' + \frac{\partial f}{\partial c_1} c'_1,$$

c' et c'_1 désignant deux constantes nouvelles, indépendantes de c et de c_1.

S'il s'agit, au contraire, d'une équation aux dérivées partielles admettant une intégrale définie par des équations de la forme suivante, où $\varphi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ désignent les deux fonctions arbitraires,

$$\begin{aligned}
z &= f[\alpha, \beta, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots, \psi(\beta), \psi'(\beta), \ldots],\\
x &= f_1[\alpha, \beta, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots, \psi(\beta), \psi'(\beta), \ldots],\\
y &= f_2[\alpha, \beta, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \ldots, \psi(\beta), \psi'(\beta), \ldots],
\end{aligned}$$

on aura à joindre à ces trois équations les suivantes :

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{\partial f}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial \beta}\beta' + \sum \frac{\partial f}{\partial \varphi^{(i)}(\alpha)}\varphi_0^{(i)}(\alpha) + \sum \frac{\partial f}{\partial \psi^{(k)}(\beta)}\psi_0^{(k)}(\beta),\\
0 &= \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\beta' + \sum \frac{\partial f_1}{\partial \varphi^{(i)}(\alpha)}\varphi_0^{(i)}(\alpha) + \sum \frac{\partial f_1}{\partial \psi^{(k)}(\beta)}\psi_0^{(k)}(\beta),\\
0 &= \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\beta' + \sum \frac{\partial f_2}{\partial \varphi^{(i)}(\alpha)}\varphi_0^{(i)}(\alpha) + \sum \frac{\partial f_2}{\partial \psi^{(k)}(\beta)}\psi_0^{(k)}(\beta),
\end{aligned}$$

(¹) On pourrait généraliser cette notion du système auxiliaire en faisant varier dans les équations, non seulement les fonctions inconnues, mais encore certaines

où $\varphi_0(\alpha)$, $\psi_0(\beta)$ désignent deux nouvelles fonctions arbitraires et entre lesquelles on pourra éliminer les variations α', β' de α et de β (¹). Nous représentons par $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$, ... les dérivées complètes prises par rapport à α et à β.

3. Comme le système auxiliaire est linéaire, son étude est relativement facile; et elle peut fournir des conclusions précises relatives au système proposé. Supposons, par exemple, qu'étant donnée une seule équation aux dérivées partielles, l'on demande que cette équation admette une intégrale générale dans laquelle figureront, sans aucun signe d'intégration, des fonctions arbitraires avec leurs dérivées, jusqu'à des ordres déterminés pour chacune des fonctions. Il devra en être de même pour l'équation auxiliaire en z', quand on y remplacera z par une solution quelconque de l'équation proposée.

Cette condition, nous l'avons vu pour le cas de deux variables indépendantes, se traduira analytiquement par certaines relations entre les *invariants* de l'équation auxiliaire. En écrivant ces relations, on obtiendra de nouvelles équations aux dérivées partielles en z, qui devront être vérifiées en même temps que l'équation proposée. La solution de la question proposée pourra être ainsi ramenée à de simples éliminations.

4. Laissant de côté les nombreuses applications que l'on peut faire de ces remarques, j'étudierai plus spécialement les deux problèmes de Géométrie suivants.

Considérons une surface (Σ) et cherchons toutes les surfaces infiniment voisines qui peuvent former avec (Σ) une famille de Lamé, c'est-à-dire une famille d'un système triple orthogonal. Si ρ, ρ_1, ρ_2 désignent les paramètres des trois familles qui composent un système orthogonal et si l'élément linéaire de l'espace est donné par la formule

$$ds^2 = H^2\, d\rho^2 + H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2,$$

H, H_1, H_2 satisfont à des relations aux dérivées partielles du second ordre que nous avons déjà démontrées au n° 149 (²). Supposons que la surface (Σ) fasse partie de la famille de paramètre ρ_2. Comme les

---

arbitraires, constantes ou fonctions. Mais on peut, en introduisant des inconnues nouvelles, ramener cette méthode plus générale à celle que nous employons dans le texte.

(¹) On pourra utiliser de même toutes les solutions incomplètes, pourvu qu'elles contiennent des arbitraires, constantes ou fonctions, que l'on pourra faire varier.

(²) *Voir* aussi nos 1039, 1047 et 1054.

surfaces de paramètres ρ et ρ_1 la coupent suivant ses lignes de courbure, on peut dire qu'en chacun de ses points, les variables ρ, ρ_1, les fonctions H et H_1, pourront être regardées comme connues; et, pour résoudre le problème proposé, il suffira de déterminer, *en tous les points de* (Σ), la fonction H_2 qui, multipliée par la constante $d\rho_2$, donne la distance de chaque point de (Σ) à la surface infiniment voisine cherchée, surface que nous appellerons (Σ'). Or la fonction H_2 satisfait (n^{os} **149**, **1039**) à l'équation

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\rho_1}\frac{\partial H_2}{\partial\rho} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}, \tag{1}$$

qui, nous l'admettrons ici pour abréger, est à la fois nécessaire et suffisante; de sorte que le problème est ramené à l'intégration complète de cette équation aux dérivées partielles en H_2.

Cette équation est l'une de celles auxquelles on peut ramener la solution complète du problème suivant :

Trouver toutes les surfaces admettant la même représentation sphérique que la surface (Σ).

Car, admettant les solutions x, y, z, elle n'est autre que l'équation *ponctuelle* relative au système conjugué formé par les lignes de courbure de (Σ) et ne diffère pas, par exemple, de l'équation (6) du n° **948** (*voir* aussi n° **950**).

Nous établissons ainsi une relation entre deux problèmes qui, au premier abord, paraissent tout à fait différents : d'une part, la détermination de toutes les surfaces admettant même représentation sphérique que (Σ) et, d'autre part, la détermination des surfaces (Σ') infiniment voisines de (Σ) dans toute famille de Lamé dont fait partie (Σ). L'explication de ce fait apparaît immédiatement lorsqu'on se rappelle le théorème de Ribaucour démontré au n° **972**. D'après cette proposition, les cercles osculateurs aux trajectoires orthogonales des surfaces d'une famille de Lamé, aux points où ces trajectoires rencontrent l'une d'elles (Σ), forment un système cyclique. Par suite, la surface donnée (Σ) et la surface cherchée (Σ') peuvent être considérées comme deux trajectoires infiniment voisines des cercles qui font partie d'un système cyclique. Et, de là résulte la génération suivante de (Σ') :

On construira le système cyclique le plus général formé de cercles normaux à (Σ), *et la surface cherchée* (Σ') *sera une de*

celles que nous avons appris à construire aux nos 951 et suiv., et qui sont normales à tous les cercles du système.

Comme on sait que la recherche de tous les systèmes cycliques précédents se ramène à la détermination de toutes les surfaces admettant même représentation sphérique que (Σ), l'explication cherchée est ainsi fournie d'une manière complète; et la relation établie entre les deux problèmes confirme un résultat déjà établi par une autre voie (no 981), mais qui, ici, devient évident : c'est que le problème de la représentation sphérique, une fois résolu pour une surface (Σ), le sera par cela même pour toutes les surfaces inverses de (Σ).

5. Considérons maintenant un autre problème : *la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée* (Σ). Si, conformément aux idées précédentes, nous commençons par rechercher les surfaces applicables sur (Σ) et infiniment voisines de (Σ), nous savons que la solution du problème se ramène en définitive à l'intégration d'une équation à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = k\theta. \tag{2}$$

Les surfaces pour lesquelles on sait le résoudre se partagent en différentes *classes*. Pour chacune d'elles, on connaît les expressions des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface en fonction des paramètres α et β des lignes asymptotiques; les expressions contiennent au moins quatre fonctions arbitraires de α et de β. Pour les surfaces de la $p^{\text{ième}}$ classe, l'intégrale générale de l'équation en θ comprend deux fonctions arbitraires de α et de β, avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, et les expressions de x, y, z contiennent $2p+4$ fonctions arbitraires (ou $2p+2$ si l'on choisit convenablement les paramètres α et β). Or il est clair que, si l'on considère toutes les surfaces qui sont applicables sur une surface donnée et sont déterminées par des équations qui ne contiennent que des fonctions arbitraires avec leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé, le problème de la déformation infiniment petite se résoudra par des formules qui seront toujours de même forme et de même nature pour chacune d'elles. Toutes ces surfaces devront donc faire partie de l'une des classes que nous venons de définir; et l'*on devra pouvoir les obtenir en établissant des relations finies ou différentielles entre les fonctions arbitraires de α et de β qui figurent dans les expressions générales des coordonnées x, y, z d'un point de l'une de*

ces surfaces exprimées au moyen de α *et de* β. Telle est la marche que nous allons suivre et formuler analytiquement.

6. Reprenons les formules du n° 883

$$(3)\quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} - \theta_3 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\beta} - \theta_3 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ y = \int \left(\theta_3 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \theta_1 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \theta_1 \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ z = \int \left(\theta_1 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2 \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta, \end{cases}$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont solutions d'une équation de la forme (2).

Les quantités x_1, y_1, z_1, définies par les relations

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \int \left(\theta_1 \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ y_1 = \int \left(\theta_2 \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta, \\ z_1 = \int \left(\theta_3 \dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta, \end{cases}$$

où ω est l'intégrale la plus générale de l'équation (2) à laquelle satisfont θ_1, θ_2, θ_3, donnent la solution la plus générale de l'équation aux différentielles totales

$$(5)\qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0,$$

de sorte que, ε désignant une constante infiniment petite,

$$x + \varepsilon x_1, \quad y + \varepsilon y_1, \quad z + \varepsilon z_1$$

sont les coordonnées d'un point d'une surface (Σ') infiniment voisine de (Σ) et applicable sur (Σ).

7. Cela posé, si l'on a établi, entre les fonctions arbitraires contenues dans les formules (3), des relations telles que toutes les surfaces (Σ) soient applicables les unes sur les autres, et si l'on fait varier, non seulement les fonctions arbitraires qui subsistent seules, mais aussi les paramètres α et β, les expressions

$$x + \delta x + \frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial x}{\partial\beta}\delta\beta,$$

$$y + \delta y + \frac{\partial y}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial y}{\partial\beta}\delta\beta,$$

$$z + \delta z + \frac{\partial z}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial z}{\partial\beta}\delta\beta,$$

où δx, δy, δz désignent les variations provenant du changement de forme des fonctions arbitraires, seront aussi les coordonnées d'un point d'une surface applicable sur (Σ) et infiniment voisine de (Σ). Pour que cette surface se confonde avec (Σ'), il sera nécessaire et suffisant que l'on puisse disposer de $\delta\alpha$, $\delta\beta$ de manière à satisfaire aux équations [1]

$$(6)\qquad \begin{cases} \delta x + \dfrac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dfrac{\partial x}{\partial\beta}\delta\beta = x_1, \\ \delta y + \dfrac{\partial y}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dfrac{\partial y}{\partial\beta}\delta\beta = y_1, \\ \delta z + \dfrac{\partial z}{\partial\alpha}\delta\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial\beta}\delta\beta = z_1; \end{cases}$$

et, réciproquement, toutes les fois qu'il sera possible de satisfaire à ces équations, toutes les surfaces (Σ) seront applicables les unes sur les autres.

8. Si l'on remarque que θ_1, θ_2, θ_3 sont les paramètres directeurs de la normale à (Σ), on peut remplacer les trois équations précédentes par l'unique équation

$$(7)\qquad \Theta = \theta_1(\delta x - x_1) + \theta_2(\delta y - y_1) + \theta_3(\delta z - z_1) = 0,$$

obtenue en ajoutant les trois équations après les avoir multipliées respectivement par θ_1, θ_2, θ_3.

Cette dernière équation contient des signes de quadrature, mais on peut les faire disparaître par différentiation. On a, en effet, identiquement

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - k\Theta = \mathrm{S}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\left(\delta\dfrac{\partial x}{\partial\beta} - \dfrac{\partial x_1}{\partial\beta}\right) \\ \qquad + \mathrm{S}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\left(\delta\dfrac{\partial x}{\partial\alpha} - \dfrac{\partial x_1}{\partial\alpha}\right) + \mathrm{S}\,\theta_1\left(\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right) \\ \qquad = 2\begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\beta} & \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\beta} \end{vmatrix} - 2\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}\mathrm{S}\,\theta_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta} + 2\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}\mathrm{S}\,\theta_1\dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}. \end{cases}$$

Et, par conséquent, il faudra d'abord que les fonctions ω, θ_1, θ_2, θ_3,

---

[1] Nous supposons que la constante ε ait été réunie en multiplicateur aux fonctions arbitraires qui figurent dans ω.

$\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ puissent vérifier identiquement la relation

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \delta\theta_1 & \delta\theta_2 & \delta\theta_3 \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} \\ \dfrac{\partial\theta_1}{\partial\beta} & \dfrac{\partial\theta_2}{\partial\beta} & \dfrac{\partial\theta_3}{\partial\beta} \end{vmatrix} - \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \mathrm{S}\, \theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} + \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \mathrm{S}\, \theta_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} = 0,$$

qui est débarrassée de tout signe d'intégration. Lorsque cette équation sera vérifiée, la principale difficulté du problème aura disparu; il restera néanmoins à vérifier l'équation primitive (7), qui n'est nullement une conséquence de la précédente, mais dont le premier membre Θ satisfera alors, en vertu de l'identité (8), à l'équation

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = k\Theta.$$

9. Appliquons d'abord cette méthode générale aux surfaces de la première classe, pour lesquelles on a

$$(10)\qquad \theta_1 = A_1 + B_1, \qquad \theta_2 = A_2 + B_2, \qquad \theta_3 = A_3 + B_3,$$

A_1, A_2, A_3 étant des fonctions de α et B_1, B_2, B_3 des fonctions de β. L'équation à invariants égaux à laquelle satisfont θ_1, θ_2, θ_3 est ici

$$(11)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

et l'on a

$$(12)\qquad \begin{cases} x = A_3B_2 - A_2B_3 + \int(A_2\,dA_3 - A_3\,dA_2) - \int(B_2\,dB_3 - B_3\,dB_2). \\ y = A_1B_3 - A_3B_1 + \int(A_3\,dA_1 - A_1\,dA_3) - \int(B_3\,dB_1 - B_1\,dB_3). \\ z = A_2B_1 - A_1B_2 + \int(A_1\,dA_2 - A_2\,dA_1) - \int(B_1\,dB_2 - B_2\,dB_1). \end{cases}$$

Voyons si l'on peut établir entre les fonctions A et les fonctions B des relations telles que toutes les surfaces correspondantes soient applicables les unes sur les autres. Comme il doit rester une fonction arbitraire de α et une fonction arbitraire de β, il est clair qu'il ne faudra obtenir *qu'une* relation entre les fonctions A et *une* entre les fonctions B.

On a ici

$$(13)\qquad \omega = A + B,$$

t l'équation fondamentale prend la forme

$$(14)\quad \begin{vmatrix} \delta A_1 + \delta B_1 & \delta A_2 + \delta B_2 & \delta A_3 + \delta B_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \end{vmatrix} - A' \mathop{\mathrm{S}} \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} + B' \mathop{\mathrm{S}} \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} = 0.$$

Comme, par sa nature même, elle se décompose en relations linéaires entre les fonctions de α et entre les fonctions de β; comme, d'autre part, A' et B' s'annulent en même temps que les δA_i et les δB_i, on peut admettre que A' dépend linéairement de δA_1, δA_2, δA_3; que B' dépend linéairement de δB_1, δB_2, δB_3; et, par suite, l'équation précédente se décomposera dans les deux suivantes :

$$(15)\quad \begin{vmatrix} \delta A_1 & \delta A_2 & \delta A_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \end{vmatrix} - A' \mathop{\mathrm{S}} (A_i + B_i) B'_i = 0,$$

$$(16)\quad \begin{vmatrix} \delta B_1 & \delta B_2 & \delta B_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \end{vmatrix} + B' \mathop{\mathrm{S}} (A_i + B_i) A'_i = 0.$$

Si, dans la première, on donne à α une valeur quelconque, mais fixe, elle prend la forme

$$(B_1 + m_1) B'_1 + (B_2 + m_2) B'_2 + (B_3 + m_3) B'_3 = 0,$$

m_1, m_2, m_3 désignant des constantes. En intégrant, on aura donc

$$(B_1 + m_1)^2 + (B_2 + m_2)^2 + (B_3 + m_3)^2 = \text{const.}$$

Mais, comme il est permis, dans les expressions des θ_i, de réunir les constantes m_i aux fonctions A_i, on pourra supposer que ces constantes soient nulles et ramener l'équation précédente à la forme

$$(17)\quad B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 = 2h,$$

h désignant une constante. Alors l'équation (15) prendra la forme

$$\begin{vmatrix} \delta A_1 & \delta A_2 & \delta A_3 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 \\ B'_1 & B'_2 & B'_3 \end{vmatrix} - A' \mathop{\mathrm{S}} A_i B'_i = 0,$$

et, comme il ne peut exister aucune autre relation entre les fonctions B_i, on devra annuler le coefficient de chaque dérivée B'_i, ce qui

donnera

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} A'_3\,\delta A_2 - A'_2\,\delta A_3 - A' A_1 = 0, \\ A'_1\,\delta A_3 - A'_3\,\delta A_1 - A' A_2 = 0 \\ A'_2\,\delta A_1 - A'_1\,\delta A_2 - A' A_3 = 0. \end{array}\right.$$

On déduira de là, en multipliant les trois équations respectivement par A'_1, A'_2, A'_3,

$$A_1 A'_1 + A_2 A'_2 + A_3 A'_3 = 0,$$

et, par suite,

$$(19)\qquad A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 2h_1,$$

h_1 désignant une nouvelle constante.

L'équation (9) étant vérifiée en vertu des relations (17) et (19), il faut revenir maintenant à l'équation (7). On a ici

$$x_1 = AB_1 - BA_1 - \int (A\,dA_1 - A_1\,dA) + \int (B\,dB_1 - B_1\,dB),$$

$$y_1 = AB_2 - BA_2 - \int (A\,dA_2 - A_2\,dA) + \int (B\,dB_2 - B_2\,dB),$$

$$z_1 = AB_3 - BA_3 - \int (A\,dA_3 - A_3\,dA) + \int (B\,dB_3 - B_3\,dB).$$

Un calcul facile donne, en tenant compte des relations (18) et des relations analogues relatives aux fonctions B_i,

$$\begin{aligned} \delta x - x_1 = {} & (A_2 + B_2)(\delta A_3 - \delta B_3) \\ & - (A_3 + B_3)(\delta A_2 - \delta B_2) + (A + B)(A_1 - B_1). \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\Theta = \mathbf{S}\,\theta_1(\delta x - x_1) = (A + B)(2h_1 - 2h).$$

Il suffira donc de prendre $h = h_1$ et l'on retrouvera ainsi, dans ce qu'elles ont d'essentiel, les propositions énoncées aux nos 769 et 770.

10. Pour les surfaces de la seconde classe, on a

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 = A'_1 + B'_1 - 2\,\dfrac{A_1 - B_1}{\alpha - \beta}, \\[2ex] \theta_2 = A'_2 + B'_2 - 2\,\dfrac{A_2 - B_2}{\alpha - \beta}, \\[2ex] \theta_3 = A'_3 + B'_3 - 2\,\dfrac{A_3 - B_3}{\alpha - \beta}. \end{array}\right.$$

Les formules qui donnent les coordonnées sont aussi plus compliquées.

Par exemple, la valeur de x est

$$x = \int (A'_2 A''_3 - A'_3 A''_2)\,d\alpha - \int (B'_2 B''_3 - B'_3 B''_2)\,d\beta + A'_3 B'_2 - A'_2 B'_3 + 2\,\frac{(A_3 - B_3)(A'_2 - B'_2) - (A_2 - B_2)(A'_3 - B'_3)}{\alpha - \beta},$$

et l'on obtiendra les valeurs correspondantes de y et de z par des permutations circulaires effectuées sur les indices 1, 2, 3. La valeur de x_1 est de même

$$x_1 = \int (A'_1 A'' - A' A''_1)\,d\alpha - \int (B'_1 B'' - B' B''_1)\,d\beta + A' B'_1 - A'_1 B' + 2\,\frac{(A - B)(A'_1 - B'_1) - (A_1 - B_1)(A' - B')}{\alpha - \beta}.$$

L'équation à résoudre (9) prend aussi une forme beaucoup moins simple.

On parvient néanmoins à en trouver une solution en adoptant l'hypothèse

$$(21) \qquad \delta A_i = A A'_i - A' A_i, \qquad \delta B_i = B B'_i - B' B_i,$$

qui conduit aux valeurs suivantes pour les fonctions arbitraires

$$(22) \qquad \begin{cases} A_1 = i\,\dfrac{A^2 - 1}{2A'}, & A_2 = \dfrac{A^2 + 1}{2A'}, \qquad A_3 = \dfrac{iA}{A'}, \\ B_1 = i\,\dfrac{B^2 - 1}{2B'}, & B_2 = \dfrac{B^2 + 1}{2B'}, \qquad B_3 = \dfrac{iB}{B'}. \end{cases}$$

A et B désignant des fonctions arbitraires, différentes, bien entendu, de celles qui figurent dans les expressions précédentes de δA_i, δB_i.

La solution correspondant à ces valeurs des fonctions A_i, B_k n'est pas distincte de celle que nous avons donnée aux nos **1078-1080** d'après M. Weingarten. Elle convient aux surfaces applicables sur le paraboloïde dont une génératrice est tangente au cercle de l'infini.

11. D'une manière plus générale, on peut se demander de trouver quelles seraient les valeurs des fonctions θ_i qui correspondraient aux solutions nouvelles considérées par MM. Weingarten, Baroni et Goursat, solutions que nous avons fait connaître au Liv. VIII, Ch. XIII. On verra facilement, en ayant égard aux formules du n° **916**,

que si p est la solution générale de l'équation (57) du n° **1074**

$$\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{\psi''(p)}{(1+\alpha\beta)^2}, \tag{23}$$

il faut prendre

$$\left\{\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2\sqrt{i}}\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\,\frac{\partial C}{\partial\beta} - \frac{\partial p}{\partial\beta}\,\frac{\partial C}{\partial\alpha}\right),\\
\theta_2 &= \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2\sqrt{i}}\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\,\frac{\partial C'}{\partial\beta} - \frac{\partial p}{\partial\beta}\,\frac{\partial C'}{\partial\alpha}\right),\\
\theta_3 &= \frac{(1+\alpha\beta)^2}{2\sqrt{i}}\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}\,\frac{\partial C''}{\partial\beta} - \frac{\partial p}{\partial\beta}\,\frac{\partial C''}{\partial\alpha}\right),
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

C, C′, C″ étant les cosinus directeurs donnés par les formules (52) (n° **1074**).

FIN DE LA QUATRIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE (¹).

A

B

C

(¹) Les chiffres donnés se rapportent aux articles et non aux pages des différents Volumes.

D

E

F

G

H

I

L

M

O

P

R

S

T

V

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE [1].

A

B

C

[1] Les chiffres arabes donnent les numéros des articles. Les Tomes I, II, III et IV finissent respectivement aux articles 310, 577, 851 et 1089.

Les chiffres romains se rapportent aux Notes. Par exemple, la notation II_{8} indique l'article 8 de la Note II.

D

E

F

G

H

J

K

L

M

T

V-W

TABLE DES MATIÈRES

DE LA QUATRIÈME PARTIE.

LIVRE VIII.

DÉFORMATION INFINIMENT PETITE ET REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

CHAPITRE XIII.

CHAPITRE XIV.

NOTES ET ADDITIONS.

NOTE I.

NOTE II.

NOTE III.

NOTES DE L'AUTEUR.

NOTE IV.

NOTE V.

NOTE VI.

NOTE VII.

NOTE VIII.

NOTE IX.

NOTE X.

NOTE XI.

FIN DES TABLES DE LA QUATRIÈME ET DERNIÈRE PARTIE.

21219 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.